

华北电力大学

博士学位论文

电力系统功角电压失稳检测方法与
耦合失稳场景分析

**Detection Methods of Power Angle and Voltage
Instability and Analysis of Coupled Instability
Scenarios in Power Systems**

黎 晓

2023 年 5 月

国内图书分类号：TM712

国际图书分类号：621.3

学校代码：10079

密级：公开

博士学位论文

电力系统功角电压失稳检测方法 与耦合失稳场景分析

博士研究生：黎 晓

导师：刘崇茹教授

申请学位：工学博士

学 科：电气工程

专 业：电气工程

所在学院：电气与电子工程学院

答辩日期：2023 年 5 月

授予学位单位：华北电力大学

Classified Index: TM712

U.D.C: 621.3

Dissertation for the Doctoral Degree

**Detection Methods of Power Angle and Voltage
Instability and Analysis of Coupled Instability
Scenarios in Power Systems**

Candidate:	Li Xiao
Supervisor:	Prof. Liu Chongru
Academic Degree Applied for:	Doctor of Engineering
Speciality:	Electrical Engineering
School:	School of Electrical and Electronic Engineering
Date of Defence:	May, 2023
Degree-Conferring-Institution:	North China Electric Power University

摘要

自 20 世纪 60 年代以来,全球范围内不断发生大面积停电事故,造成了巨大的经济损失和严重的社会影响。为了及时预警并采取有效措施以避免电网事故的发生,需要深入分析其失稳原因和现象,因此电力系统稳定性研究具有重要意义。电力系统稳定运行的基本要求之一是同步发电机的功角保持同步和系统中母线电压平稳地维持在正常范围内。传统电力系统中已经从工程经验角度总结了一些功角失稳和电压失稳的检测方法,通常认为功角问题和电压问题可以分开处理。然而,随着电力电子设备在电力系统中的比例不断增加,现有的检测方法难以满足对失稳检测速度和可靠性的更高要求。此外,在某些情况下,功角/电压等电气量之间显示出明显的强耦合特性,这使得一种稳定形态的控制措施可能会恶化另一种稳定形态。因此,本文旨在研究在线快速检测功角/电压失稳的方法,以提高应对措施的速度,从而更好地预防电网崩溃。同时,研究功角/电压失稳的耦合机理,识别耦合场景,对于采取有效的控制措施具有指导意义。本文的研究内容和创新性如下:

(1) 基于电力网络的暂态能量分布特征,提出了考虑负荷势能和割集势能的暂态功角失稳的在线快速检测方法,满足功角失稳检测对实时性和可靠性的高要求。根据暂态能量在电力网络中的流动具有 Dirac 结构特征,推导出暂态稳定域边界的支路功率表达形式,揭示了现有支路势能判据忽略负荷势能和依赖临界割集的理论局限性,解释了现有指标检测速度慢的原因。所提出的暂态功角失稳检测方法基于负荷势能补偿和相对支路势能扩展了现有的暂态功角失稳检测方法的适用条件,具有检测速度快、可靠性高、易实现的优势。

(2) 结合连续潮流法和分岔点直接法各自的优势,提出了电压稳定临界点的快速计算方法,具有在线应用的潜力。该方法的关键是,根据电力系统潮流方程在鞍结型分岔点处的特征提出了鞍结型分岔点逼近指标。通过该指标的近似线性性质预测鞍结型临界点的位置,实现了在逼近临界点时从大步长连续潮流法切换到直接法的混合计算方法,解决了连续潮流法在鞍结型分岔点附近计算量增加与直接法初值选取困难的问题。此外,该混合计算方法通过增加补逻辑解决了大步长连续潮流中鞍结型分岔和极限诱导型分岔的识别问题,通过海森矩阵隐式计算方法克服了直接法中的计算瓶颈,具有数值稳定性高且计算速度快的优势。

(3) 本文研究了功角失稳与电压失稳之间的耦合特征,包括同步发电机的功角动态及动态负荷和变流器的电压动态,揭示了两种稳定形态耦合的新规律。一方面,通过同步发电机功角子系统与电动机电压子系统的稳定域分析,基于子系统不稳定平衡点的性质分析了互联系统不稳定平衡点附近的轨迹性质,拓展了互联系统不稳

定平衡点决定失稳类型的传统观点。另一方面,打破锁相环简化为代数方程的假设,基于同步发电机功角-锁相环动力学方程分析了大量变流器接入电网时锁相环与同步发电机功角耦合的条件。运用几何奇异摄动理论,从理论层面解释了锁相环失去平衡点时由同步发电机动态主导过渡到锁相环动态主导的动力学特征。通过同伦分析法解析发电机转速,解释了奇异点附近同步发电机功角与锁相环交互的新现象,形成了新型电力系统中功角/电压稳定耦合的新认识。

(4) 本研究分析了功角失稳与电压失稳的耦合场景和解耦场景,提出了功角和电压稳定的量化评估指标以及耦合强度评估指标。根据系统轨迹和稳定域在功角-功率(δ_e-P_3)平面和功角-电流(δ_e-I_3)平面上的投影,基于奇异点附近功角/电压的交互模式,提出了考虑网络结构和负荷水平的功角/电压耦合失稳场景分类方法。基于稳定裕度与奇异点裕度的量化指标,构造了功角/电压稳定性的量化评估指标体系,并基于功角/电压的耦合机理提出了耦合强度的量化评估方法,为耦合失稳类型提供了新的分析方法,为控制策略的适应条件提供了分析工具。

关键词: 功角稳定性; 电压稳定性; 失稳检测; 耦合机理; 耦合失稳场景; 支路势能; 连续潮流; 分岔点直接法; 锁相环

Abstract

Since the 1960s, large-scale power outages have been occurring worldwide, resulting in huge economic losses and serious social impacts. In order to provide timely warning and take effective measures to avoid grid accidents, an in-depth analysis of the causes and phenomena of destabilization is needed, so the study of power system stability is of great significance. One of the basic requirements for the stable operation of a power system is that the power angle of the synchronous generator remains synchronised and that the bus voltage in the system is maintained smoothly within normal limits. Some detection methods for power angle instability and voltage instability have been summarized in traditional power systems from the perspective of engineering experience, and it is usually assumed that power angle problems and voltage problems can be handled separately. However, with the increasing proportion of power electronics in the power system, the existing detection methods can hardly meet the higher requirements for the speed and reliability of instability detection. In addition, in some cases, electrical measurements such as power angle and voltage have apparently strong coupling characteristics between them, so that control measures of one stable form can degrade the other stable form. Therefore, the purpose of this paper is to investigate online methods for fast detection of power angle/voltage destabilization to improve the speed of countermeasures and thus better prevent grid collapse. At the same time, the study of the power angle/voltage instability coupling mechanism and the identification of the coupling scenarios provide guidance for effective control measures. The research content and innovation of this paper are as follows:

(1) Based on the transient energy distribution characteristics of power networks, an online fast detection method of transient power angle instability considering load potential energy and cut-set potential energy is proposed to meet the high requirements of real-time and reliability for power angle instability detection. Based on the Dirac structure characteristic of transient energy flow in power networks, the expression form of branched power at the boundary of transient stability domain is derived, revealing the theoretical limitations of existing line potential energy criterion ignoring load potential energy and relying on critical cut-set, and explaining the reasons for the slow detection speed of existing indexes. The proposed transient power-angle instability detection method extends the applicability conditions of existing transient power-angle instability detection methods based on load potential compensation and relative line potential energy, and has the advantages of fast detection speed, high reliability and easy implementation.

(2) Combining the respective advantages of the continuation power flow (CPF) method and the point of collapse (PoC) method, a fast calculation method for the voltage stability critical point is proposed, which has the potential for online application. The key

to the method is the proposed saddle-node bifurcation point approximation index based on the characteristics of the power system power flow equation at the saddle-node bifurcation point. By predicting the location of the saddle-node bifurcation point through the approximate linearity of the index, the hybrid calculation method of switching from the large-step CPF method to the PoC method when approaching the bifurcation point is approaching, which solves the problems of increasing the CPF method's calculation near the saddle-node bifurcation point and the difficulty of selecting the PoC method's initial value. In addition, the hybrid calculation method solves the problem of identifying saddle-node bifurcation and limit-induced bifurcation in large-step CPF method by adding complementary logic and overcomes the computational bottleneck in the PoC method by the implicit calculation method of Hessian matrix, which has the advantages of high numerical stability and fast computation speed.

(3) In this paper, the coupling characteristics between power-angle instability and voltage instability are studied, including the power-angle dynamics of synchronous generator and the voltage dynamics of dynamic load and converter, revealing a new law of coupling between the two stability forms. On the one hand, through the stability domain analysis of synchronous generator power-angle subsystem and motor voltage subsystem, the trajectory properties near the unstable equilibrium point of the interconnected system are analyzed based on the nature of the unstable equilibrium point of the subsystem, which expands the traditional view that the unstable equilibrium point of the interconnected system determines the type of instability. On the other hand, we break the assumption that the phase-locked loop (PLL) is reduced to an algebraic equation. Based on the synchronous generator power angle-PLL dynamics equation, we also analyze the conditions that the PLL couples with the power angle of the synchronous generator when a large number of converters are connected to the grid. Using the geometric singular uptake theory, the dynamics of the transition from synchronous generator dynamics dominated to PLL dynamics dominated when the PLL loses its equilibrium point is explained from the theoretical level. By analyzing the generator speed, a new phenomenon of the interaction between the synchronous generator power angle and the PLL near the singularity point is explained, and a new understanding of the power-angle/voltage stability coupling in the new power system is formed.

(4) In this study, the coupling and decoupling scenarios of power-angle instability and voltage instability are analyzed, and quantitative evaluation indexes of power-angle and voltage stability as well as coupling strength evaluation indexes are proposed. Based on the projection of the system trajectory and stability domain on the δ_e - P_3 plane and the δ_e - I_3 plane, the power-angle/voltage coupling instability scenario classification method considering the network structure and load level is proposed based on the interaction pattern of power-angle/voltage near the singularity point. Based on the quantitative indexes

of stability margin and singularity margin, a quantitative evaluation index system of power-angle/voltage stability is constructed, and a quantitative evaluation method of coupling strength is proposed based on the coupling mechanism of power-angle/voltage, which provides a new analysis method for the type of coupling instability and an analysis tool for the adaptation conditions of the control strategy.

Keywords: power angle stability, voltage stability, instability detection, coupling mechanism, coupled instability scenarios, line potential energy, continuation power flow, point of collapse method, phase-locked loop

目 录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 选题背景及意义.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.2.1 功角失稳在线检测方法.....	2
1.2.2 电压稳定临界点计算方法.....	3
1.2.3 功角电压稳定耦合特性分析.....	4
1.2.4 功角电压耦合失稳场景识别.....	6
1.3 本文的主要工作.....	9
1.3.1 研究问题.....	9
1.3.2 框架路线.....	10
第 2 章 基于支路势能的功角失稳在线检测方法	12
2.1 引言	12
2.2 电力网络的功角失稳特征	12
2.2.1 基于结构保留模型的支路势能函数推导	12
2.2.2 暂态稳定边界的功率形式表示.....	14
2.3 改进支路势能判据的理论分析	16
2.3.1 支路势能判据的表达形式与理论缺陷	16
2.3.2 负荷注入系统的暂态能量特征.....	18
2.3.3 割集选择的影响.....	21
2.4 改进的暂态功角稳定在线检测方法	22
2.4.1 判别方法的改进思路.....	22
2.4.2 基于局部量测的改进支路势能判据.....	24
2.4.3 所提方法的适用性讨论.....	27
2.5 算例分析.....	30
2.5.1 负荷能量特性的验证.....	30
2.5.2 不同割集的支路势能判据验证.....	33
2.5.3 失稳检测方法的验证.....	34
2.6 本章小结.....	41
第 3 章 电压稳定临界点的混合计算方法	43
3.1 引言	43
3.2 电压稳定临界点的特征.....	43
3.2.1 电压稳定临界点的类型.....	43
3.2.2 电压稳定临界点的性质.....	45
3.3 混合计算方法的实现.....	47

3.3.1 混合计算方法的计算流程.....	47
3.3.2 鞍结型分岔点逼近指标.....	48
3.3.3 节点类型识别的补逻辑.....	51
3.3.4 失稳类型的识别.....	53
3.3.5 海森矩阵隐式计算的改进直接法.....	53
3.4 基于混合计算方法的奇异点计算	55
3.5 算例分析.....	57
3.5.1 鞍结型分岔点逼近指标性能的验证.....	58
3.5.2 方法有效性的验证.....	59
3.5.3 方法性能的验证.....	60
3.5.4 奇异点计算方法的验证.....	62
3.6 本章小结.....	64
第4章 功角和电压稳定的相互影响及耦合机理分析	65
4.1 引言.....	65
4.2 同步发电机与动态负荷之间的交互机理分析	65
4.2.1 功角子系统与电压子系统建模.....	66
4.2.2 功角子系统和电压子系统的相互影响机理	70
4.2.3 子系统互联的稳定性分析.....	76
4.3 同步发电机与变流器之间的交互机理分析	80
4.3.1 锁相环与发电机功角动态交互场景描述	80
4.3.2 同步发电机-变流器系统的动力学行为	81
4.3.3 慢动态到快动态过程的定性分析.....	86
4.3.4 锁相环失步对同步发电机动态的影响机理	87
4.3.5 算例分析.....	91
4.4 本章小结.....	95
第5章 功角电压耦合失稳场景的识别方法	96
5.1 引言.....	96
5.2 不同网络结构下的失稳场景	96
5.2.1 分析方法:功角-功率平面和功角-电流平面.....	96
5.2.2 不同网络结构与失稳形态的关系.....	99
5.3 耦合失稳场景识别方法.....	103
5.3.1 量化评估指标体系.....	103
5.3.2 耦合强度评估指标.....	109
5.4 算例分析.....	110
5.4.1 功角电压近似解耦场景识别.....	110
5.4.2 功角电压耦合失稳场景识别.....	114
5.5 本章小结.....	122
第6章 结论与展望	124

6.1 结论.....124

6.2 展望.....125

参考文献.....126

附录.....142

附录 A: 能量关系和功率表达式142

附录 B: IEEE39 和 IEEE118 系统算例信息146

附录 C: 海森矩阵显式计算量的估计方法.....150

附录 D: 发电机势能关于负荷电导的灵敏度分析152

附录 E: 奇异点附近的动力学分析154

附录 F: 奇异点附近轨迹的近似表达式162

第1章 绪论

1.1 选题背景及意义

近年来，我国电力系统已经发展为特高压大容量直流互联以及大量风电、光伏等新能源接入的新格局。截止 2021 年底，全国已投运的特高压直流输电工程总容量超过 12.6 万兆瓦^[1]；全国新能源累计发电装机容量超过 642 万兆瓦，占比达到总装机量的 27%。

随着新型电力系统的发展，电力系统的稳定问题表现出新的特征。从认识物理现象的角度，虽然现有的研究不断地拓展原有的认识框架，但目前稳定性的新内涵还未达成共识^[2-4]。电力系统稳定性本质上是一个单一问题，即系统扰动后恢复到原运行点或新的运行点的能力。但是这个问题的维度高、复杂性高、表现形式多样，因此在不同的阶段和场景下，电力系统稳定性会呈现出不同的稳定形态。基于对稳定性的物理认识和稳定性分析方法的差异，在我国的《电力系统安全稳定导则》^[5]中，电力系统的稳定问题被分为三大类：功角稳定、频率稳定和电压稳定，如图 1-1 所示。这种分类方式暗含着在分析特定类型的问题时，可以通过适当的假设来简化问题。例如，在暂态功角稳定的研究中，可以忽略负荷的一些动态特性；在研究电压稳定问题时，可以忽略发电机功角动态。然而，电力系统的稳定现象并不是相互独立的，不同类别的稳定性之间也存在相互关联和相互耦合^[6,7]。由于新型电力系统从同步发电机为主转变为同步发电机与电力电子设备共存，设备之间的相互作用明显增强，故障造成的影响范围容易扩大，功角和电压稳定问题之间存在相互影响。本文将关注这两类稳定现象：功角稳定和电压稳定，以及原有框架中没有涉及到的两者之间的耦合现象。

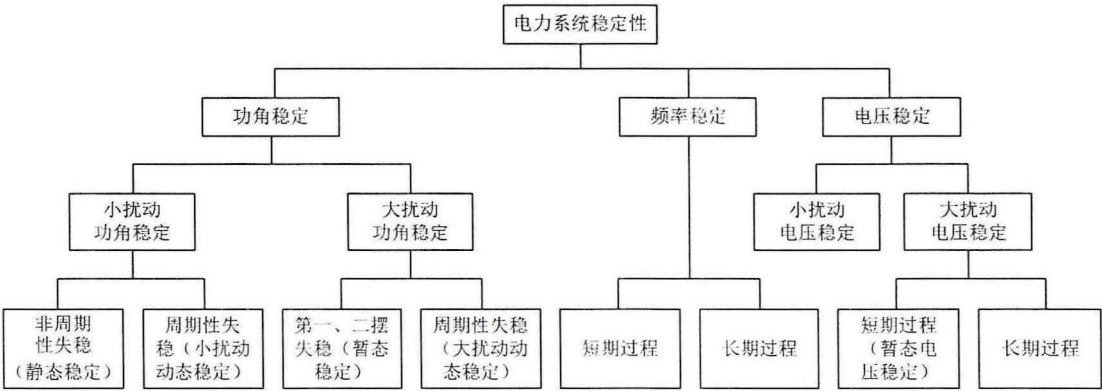


图 1-1 电力系统的稳定性分类

Fig.1-1 Stability Classification of Power Systems

现有仿真研究也发现功角/电压耦合失稳带来新的风险。广东电网异步联网前,交直流并联系统的功角稳定和电压稳定问题突出,交流故障引发的多回直流同时换相失败可能同时出现电压失稳和功角失稳^[8]。吉泉直流大功率扰动引起的功角失稳和电压失稳相互作用、彼此助增,加速恶化了系统安全稳定水平,最终导致整个系统失稳^[9]。新能源发电设备的引入也使得电网的失稳模式复杂化,不同功率运行方式下呈现失稳形态的转变^[10,11]。

电力系统的稳定性研究需要解决这两类问题:第一是评估稳定裕度,预判、预警系统失稳;第二是挖掘稳定性现象背后的规律,有助于加深人们对物理现象的认识。二者有利于在故障前能够提前采取预防控制增加稳定裕度,在故障后能够及时地采取正确的紧急控制措施,将系统恢复到稳定的状态,避免造成更大的损失。

失稳检测方法和失稳机理分析的研究需求仍然在增加。现有的一些失稳检测方法依靠工程经验,会随着电力系统特征的变化而可靠性降低,甚至不再适用。而且失稳检测方法的性能直接影响到稳定控制防线的启动时间,所以需要开发机理性更强,性能更优的检测方法。在失稳机理方面,学术界也一直在寻找多种方法来探究不同失稳现象背后的原因^[12-14]。虽然基于数值计算的时域仿真法可以对稳定性现象进行模拟和探索,获得一些经验,但由于系统的强非线性、高维度、多场景等特点,仅仅通过时域仿真法难以获得快速的稳定性评估和较为全面的认识。这也促使人们不断地去寻找更有效的方法、更合适的工具。根据已有的研究结果,由于暂态功角失稳与暂态电压失稳本身具有不同的失稳现象和机理,所以当两者之间弱耦合的时候,能够针对两种稳定现象分别采取有效的控制措施。然而,当两者之间强耦合时,如果机理不清晰,针对一类稳定问题施加的控制措施可能会对另一类稳定问题引发负效应^[15,16]。例如,为恢复功角稳定而采取的直流调制可能导致电压崩溃。

基于上述背景,在失稳检测方面,本文研究了功角失稳的在线检测方法和电压稳定临界点的计算方法。在失稳机理方面,本文研究了功角/电压失稳的耦合特性和耦合失稳场景的量化评估方法。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 功角失稳在线检测方法

现有功角稳定在线检测方法较多,可以大致分为超实时仿真法、能量函数法、人工智能法、基于发电机轨迹特征的方法、基于割集支路的方法等类别。

暂态稳定性分析方法中的时域仿真法计算量大,实现超实时计算难度高。文献[17]提出了一种基于超实时计算的在线检测方法,但局限于单台发电机单元失步的场景。稳定性分析方法中常用的能量函数法具有清晰的理论基础,但很难应用于复

杂的控制模型。为了满足在线检测的需要,各种修正的能量函数法被提出。例如文献[18]通过离线构造“干扰模式查找表”,克服在线计算主导不稳定平衡点的困难。文献[19]基于 Zubov 法构建李雅普诺夫函数,提出了在线估计暂态稳定域的方法。文献[20]提出了一种量测-仿真混合的在线稳定性分析方法,结合了时域仿真和能量函数方法。在文献[21-23]中,使用等面积准则扩展了能量关系,并根据降维后动能和势能之间的关系评估了系统的暂态稳定性。

近年来,由于人工智能的快速发展,基于人工智能的暂态稳定在线检测方法得到了越来越多的应用^[24-29]。人工智能方法在暂态稳定辨识方面有很大的潜力,但由于缺乏因果分析,实现一种实用的人工智能方法很有挑战性。然而,由于对训练数据的高度依赖性,在线电力系统应用的人工智能算法稳定性是不确定的。文献[30,31]使用能量函数方法中的概念来改进这类检测方法。

随着相量测量单元(PMU)和广域测量技术的成熟,系统可以实时获取大量的运行信息。从测量数据中提取系统的稳定性特征对于检测暂态功角失稳具有重要价值。在文献[32-36]中,故障后轨迹的特征用于检测暂态转子角的不稳定性。 ω - δ 平面上轨迹的凹凸性表明发电机失步。文献[37]提出利用 Lyapunov 指数的方法检测发电机功角稳定,但需要较长的检测时间来获得足够多的发电机功角量测数据。文献[38-40]提出了基于 PMU 量测的发电机轨迹在线预测方法,以检测暂态功角稳定。文献[41]提出组合的方法来提高这类无模型方法的可靠性。文献[42]提出通过离线计算获得发电机功角阈值的方法用于失稳检测。

以上方法中大多数都依赖于大量发电机的高精度 PMU 测量,增加了数据通信的负担和在线实施的难度,或需要大量离线计算。基于割集支路的方法不需要发电机转子的量测。文献[43]最早基于结构保留能量函数提出割集稳定性判据,在随后的研究中其精度得到了提高^[44]。文献[45,46]提出了一种类似割集稳定判据的失稳检测方法,但仅适用于两区域简单系统。文献[47,48]基于割集稳定判据提出了发电机暂态失稳在线检测方法,适用性更广。但这类方法的检测时间滞后于轨迹穿过稳定边界的时间,本文针对该缺陷进行了理论分析,提出了改进方法。

1.2.2 电压稳定临界点计算方法

电压稳定的在线检测方法分为两类,一类是利用雅克比矩阵奇异值,灵敏度、戴维南等值等方法构造电压稳定指标^[49]。这些指标只能基于当前状态估算电压裕度,准确度不高,也很难考虑系统中的约束条件。另一类电压稳定检测方法基于完整的系统模型计算电压稳定的临界点,从而评估电压稳定裕度。临界点处的灵敏度信息还可为配置无功补偿^[50],切负荷^[51]等措施提供重要信息。常用的临界点计算方法有连续潮流法和分岔点直接算法。

连续潮流法^[52]具有数值稳定性高、能同时考虑发电机的无功功率限制等约束条件的优势，很容易处理极限诱导分岔^[53]。但是为了准确地计算鞍结型分岔点，现有的连续潮流计算方法计算量大，难以满足在线计算的需求。主要表现在以下两个方面：（1）由于 PV 曲线在鞍结型分岔点附近的非线性特性明显，预测步长过大会导致预测点距离 PV 曲线较远，使得校正环节中牛顿迭代法的迭代次数显著增加，甚至导致牛顿法不收敛^[54]或扩展潮流方程无解^[53]。通过步长调整策略和参数化过程能够明显改善连续潮流的收敛性，但会使得连续潮流的步长在远离鞍结型分岔点时使用较大的步长，在靠近分岔点时使用较小的步长^[55,56]，这种策略需要较多的计算量来逼近负荷极限点。（2）“斜锐角型” PV 曲线，可能使得校正环节中的牛顿法不收敛^[57]。这种不收敛现象在全局性参数化方法与不合适的局部参数化方法中都可能出现。出现这种情况时，计算过程中需要调整参数化方法^[55]，重新计算校正步，或者采用线性搜索等求解方式^[58]，会显著增加总的迭代计算次数，降低计算速度。

分岔点直接算法基于分岔点的判别条件直接计算临界点，被称为直接法^[59-63]。直接法通常采用牛顿迭代求解，在合适的初值选择下能够快速准确地计算出鞍结型分岔点。但是牛顿法对初值较为敏感，不合适的初值可能导致计算发散。文献[64-66]提出的直接计算方法，不需要设置初值，提高了直接迭代方法的收敛性，但是计算节点的选择直接影响到该方法的收敛特性。这类直接法对于 PV 曲线呈现“抛物线”形状的薄弱节点具有较好的收敛特性，但是当初始潮流解远离负荷极限点时，薄弱节点的选择并不容易，因为 PV 曲线的非线性特性在逼近临界点处才明显地显现出来^[49,67]。文献[68,69]尝试将连续潮流法和直接法的优势综合起来进行计算，通过连续潮流快速穿过鞍结型分岔点，寻找鞍结型分岔点的近似解作为直接法的迭代初值，然后用直接法计算准确的鞍结型分岔点。但是，连续潮流方法在 PV 曲线上穿过鞍结型分岔点时，为了解决收敛性的问题而采用的步长调整策略或参数化方法均需要较多的计算量，限制了该方法的计算效率。

1.2.3 功角电压稳定耦合特性分析

当研究电压稳定和功角稳定的交互特性时，最简单的情形就是由单机无穷大系统和单机负荷系统结合的三节点系统，如图 1-2 所示。（ E_1 —等值发电机； E_0 —无穷大系统； Z_1 和 Z_0 —等值线路阻抗； Z_L —负荷阻抗。）该系统由一台等值发电机、一个负荷和一个无穷大系统组成。基于对这样简单系统的研究，影响系统倾向于出现某种失稳形态的因素很多^[70-72]，比如系统负荷的位置、负荷功率因素、发电机电抗、网络参数、功率流向、系统无功支撑的能力等等。

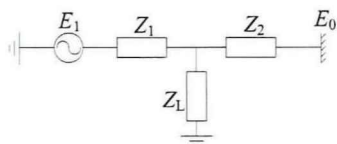


图 1-2 简单三节点系统

Fig.1-2 Simple 3-node system

《电力系统安全稳定导则》^[5]中指出，应注意区别由功角失稳引起的振荡中心附近电压降低和暂态电压失稳引起的电压降低。此外，还存在负荷变化引起的低电压造成发电机失步的现象，针对这几种现象应采取不同的控制措施^[73,74]。例如文献[75]中指出，中长期时间尺度的电压失稳可能会引起发电机失去平衡点，逐渐转变为暂态功角失稳。在故障情况下，随着故障切除时间的延长，系统的失稳形式也可能从电压失稳形式转变为功角失稳形式^[76]。文献[73]基于上述简单三节点系统对以负荷变化为主导引起功角失稳现象进行了简单解释：送端机群的功率—功角曲线随着受端系统某处负荷发生电压失稳而左移。根据扩展等面积法则，系统在这种情况下经受扰动时，加速面积增大，减速面积减小，易发生功角失稳；所以在这种情况下采取切负荷比切机更有效。文献[74]在此原理上进行了详细的仿真验证，讨论了感应电动机在系统功角失稳过程中所起的作用。文献[77]则从混沌现象的角度研究了失稳模式切换。

也有一些文献通过功角稳定与电压稳定的近似解耦分析，探索功角稳定与电压稳定的关系。文献[78]在所有发电机转子同步的假设下，使用“增量无功电流网络”的概念，就振荡不稳定性，尝试从系统的功角稳定性中解耦分析电压稳定性。在文献[79]中，利用奇异摄动理论，将中长期电压稳定的慢动态与暂态功角稳定的快动态解耦，但这种解耦方式不适用于暂态电压稳定与暂态功角稳定。文献[80]从自组织同步性的角度对比了忽视和包含电压调节动态对功角稳定性评估的差异。

目前由于大量变流器接入电力系统，功角稳定和电压稳定的相互作用发生了一些变化。例如，变流器的内电动势相角，不再依赖于机械角度，而是依赖于控制算法。系统中的无功与相位之间，以及有功与电压幅值之间也会相互耦合，无功交换及有功交换的动态过程也会相互影响^[12]。文献[10]通过仿真分析，说明新能源功率增加也会导致系统从功角失稳变化为电压失稳。

本文也通过机理分析，说明同步发电机功角与变流器出口电压会产生相互影响，变流器出口电压降低导致锁相环失稳，进而造成不同于传统电网的功角失稳形态^[81]。暂态过程中变流器出口电压与发电机功角的耦合体现在锁相环与同步发电机之间的交互。已有的针对大扰动下锁相环与同步发电机功角的相互影响的研究认为：1) 当锁相环稳定时，变流器对电网主要表现出变流器外环控制的特征，可以近似等值为恒功率或者恒阻抗^[82]。较多文献讨论了这种情况下新能源电源经变流器接入电网

的渗透率^[82-84]、接入点位置^[85-87]，功率控制方式^[88,89]等对同步发电机功角稳定性的影响。2) 大扰动下锁相环失步时，锁相环动态过程的时间尺度明显小于发电机的转子时间尺度，因此将锁相环简化为代数方程讨论同步发电机的功角稳定性问题^[90,91]。文献[90]指出锁相环可能给同步机与双馈风机之间带来新的同步失稳模式，提出了两种与风机等效内电势角度有关的稳定性约束。文献[91]同样指出含变流器电网的同步发电机暂态功角失稳机理与传统电网相比，存在新的失稳约束。然而，当变流器连接点(Point of Common Coupling, PCC)点电压跌落^[92-94]，或者电网强度较弱^[95,96]、故障后 PCC 点相位跳变^[97]等情况下，锁相环可能失去与电网保持同步的能力^[19-21]。此时，将换流器简化为恒功率源或恒阻抗无法反应出锁相环失步情况下对同步发电机的影响；当锁相环在大扰动后的暂态过程中失去平衡点时，将锁相环简化为代数方程的条件不再成立。因此，现有的结论“变流器失去平衡点后导致同步发电机失去同步”在本文中进行了更加深入的研究。

1.2.4 功角电压耦合失稳场景识别

系统中功角和电压失稳的耦合模式的识别方法，按照适用条件，分为适用于小扰动分析和适用于大扰动分析的方法。按照机理性的强弱，分为基于工程经验的方法与基于非线性数学理论的方法。按照直观性的强弱，分为基于PMU量测的方法与基于系统数学模型的方法。现有方法按照这三个方面的特点分类，如图1-3所示。

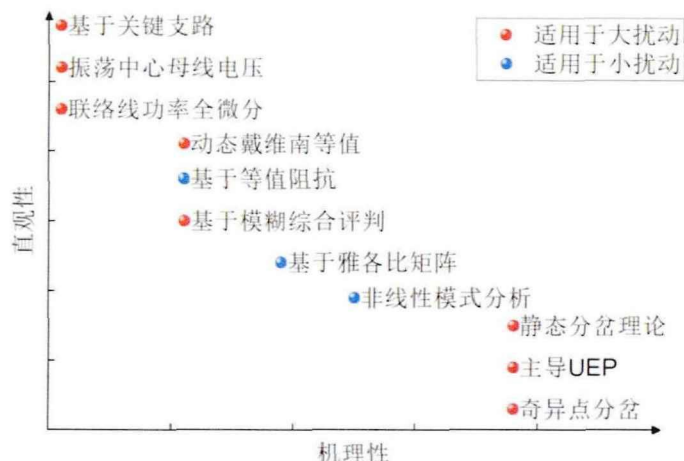


图 1-3 功角电压耦合失稳模式识别方法的特点

Fig.1-3 Characteristics of power angle voltage coupling instability pattern recognition method

适用于小扰动的方法有：基于雅克比矩阵的识别方法、基于非线性模式分析的识别方法、基于等值阻抗的识别方法。总结这三种方法，其识别依据如表 1-1 所示。

基于雅克比矩阵奇异性的识别方法，通过分析微分代数模型的扩展雅克比矩阵或者是潮流方程的雅克比矩阵的奇异性，识别系统失稳模式。文献[98]将雅克比矩阵简化为两个子矩阵：一个与电压的相角相关，称为发电机矩阵；另一个与电压的

幅值相关，称为电压矩阵。发电机矩阵的实质就是把网络对发电机的影响作为对发电机功角变量的修正，仅保留发电机功角变量。同理，负荷矩阵把网络对负荷的影响作为对负荷节点电压和相角修正，仅保留了负荷节点的电压和相角。文献[99]比较这两个矩阵的最小奇异值。如果电压矩阵的最小奇异值比功角矩阵更小，则认为系统更容易发生功角失稳；同理功角矩阵也是这样。文献[49,100]也利用类似的原理，通过比较了雅可比矩阵的最小特征值与功角、电压的相关性大小来识别电压和功角失稳。

表 1-1 适用于小扰动的功角电压耦合失稳模式识别方法

Table 1-1 A angle-voltage coupling instability pattern recognition method for small disturbances

分析方法	识别依据	
	电压失稳	功角失稳
基于雅可比矩阵	发电机矩阵首先奇异	功角矩阵首先奇异
非线性模式分析	$\max h'_{k,l} $ 的 j, k, l 模态与电压变量	$\max h'_{k,l} $ 的 j, k, l 模态与功角变量
	强相关	强相关
基于等值阻抗	PQ节点的阻抗裕度趋于零	PV节点的电阻裕度趋于零

基于非线性模式分析的识别方法，包括向量场正规形法^[101]和模态级数法^[102]。两种方法都是将电力系统的状态方程 $\dot{X} = F(X)$ 在平衡点处泰勒展开，保留一阶项和二阶项，通过向量场正规形和模态级数法求得原系统的近似解，表示为式(1-1)。

$$x_i(t) = \sum_{j=i}^n A_{ij} e^{\lambda_j t} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n B_{ikl} e^{(\lambda_k + \lambda_l) t}$$

(1-1)

式中 B_{ikl} ——非线性系数，体现了系统中的一些非线性特性，包含非线性相关系数 $h'_{k,l}$ ，是线性化分析理论的拓展。

文献[103,104]在电力系统电压崩溃点附近对雅可比矩阵进行模态分析，通过绝对值最小的特征值 λ_j 对应的最大的系数 $|h'_{k,l}|$ 判断系统失稳耦合模式。如果模式 j, k, l 都与电压变量（或功角变量）强相关，则认为系统出现电压（或功角）稳定问题；如果同时与两者相关，则认为系统同时存在两种稳定问题。

基于等值阻抗的识别方法，依赖于对 PV 节点和 PQ 节点所接入的网络进行等值。文献[105]提出阻抗裕度和电阻裕度：当 PQ 节点的阻抗裕度趋于零时，负荷功率趋于临界点，认为系统出现电压稳定问题；当 PV 节点的电阻裕度趋于零时，PV 节点的注入功率趋于极值，认为系统出现了功角稳定问题。文献[106]也提出对 PV 节点和 PQ 节点分别计算其功率极限的裕度，然后通过比较得出系统失稳模式。

大扰动下功角电压稳定耦合模式的识别方法，大多数源于人们对电压稳定和功角稳定的物理特征的总结。基于大扰动下电压稳定与功角稳定的不同特点，与电压失稳有关的特征物理量有：负荷母线上的电压形态、暂态过程中的戴维南等值阻抗

等。与功角失稳有关的特征物理量有：联络线的母线电压形态、联络线上的传输功率波形、戴维南等值电势、发电机功角、振荡中心等。这类耦合失稳形态的识别方法都是这些特点的组合。这些识别方法的特点如表 1-2 所示。

文献[107]从失稳事故中，根据负荷中心的母线电压和联络线的母线电压在电压失稳和功角失稳时表现出来的不同特征，提出了可工程应用的识别电压失稳和功角失稳的判据。根据已有的工程经验：故障后系统中的发电机相对角成减幅振荡，则系统功角稳定；中枢点母线电压低于限定值（一般取0.80p.u.）不超过限定时间（一般为10s），则认为系统电压稳定。这些工程判据虽然缺乏完善的理论基础，但在这种认识的基础上发展出一些识别方法。

表 1-2 适用于大扰动的功角电压耦合模式识别方法

Table1-2 The power angle voltage coupling pattern recognition method for large disturbances

分析方法	参考的变量	
	电压失稳	功角失稳
特征物理量	负荷母线电压	振荡中心母线电压
	戴维南等值阻抗	戴维南等值电势
	功角分量 ΔP_δ	电压分量 ΔP_v
	模糊综合评判指标 F	模糊综合评判指标 F
	$d\Delta\theta/dt>0$ 时 $dP/d\Delta\theta<0$	$d\Delta\theta/dt>0$ 时 $dP/d\Delta\theta>0$
	始终 $D_m<0$	存在 $D_m>0$
动力学理论	低电压的UEP发生鞍结点分岔	大功角的UEP发生鞍结点分岔
	低电压的主导UEP	大功角的主导UEP
	越过代数方程奇异点	越出边界UEP平衡点流形

文献[108]提出基于负荷母线电压和振荡中心母线电压的方法，通过检测低电压区域，识别系统电压失稳；通过检测振荡中心母线电压振荡，识别系统功角失稳。当两种现象同时出现时，如果低电压负荷区域相连的高压侧母线位于振荡中心线路，则判断系统失稳形态以功角失稳为主，否则电压失稳为主。文献[109]通过暂态过程的戴维南等值参数识别电压失稳和功角失稳。电压失稳为主导时，负荷点的戴维南等值阻抗持续下降至低于系统等值阻抗；而功角失稳为主导时，发电机功角摆开且负荷点的戴维南等值电势下降。文献[110]提出基于联络线功率全微分的方法。将输电断面有功功率对功角和电压求全微分，得到其功角分量 ΔP_δ 与电压分量 ΔP_v 。通过比较 ΔP_v 与 ΔP_δ 分量的大小，区分电压失稳和功角失稳。这种方法符合人们对电压稳定与功角稳定的直观认识，但是这个指标的一个关键推导步骤不严谨：功率的大小关系不能推导出功率导数的大小关系。文献[111]提出基于模糊综合评价，组合功角指标和电压指标的耦合模式识别方法。文献[112]根据关键支路的两端电压相角差 $\Delta\theta$ 和支路功率 P 的变化趋势判断系统失稳模式，其实是在判断功角失稳^[46]。文献

[113]利用关键支路两端无功的乘积提出系统的主导性判别指标 D_m 。

基于动力学理论的识别方法都与平衡点的特征相关。这些方法的机理性更强，理论基础清晰，但难以从物理场景上解释功角与电压的耦合关系。

文献[114]基于静态分岔理论，提出统一分析暂态功角稳定和大干扰电压稳定的能量函数框架。在这一研究中，把系统稳定性的丧失看作是系统的稳定平衡点(SEP)与稳定边界上一类不稳定平衡点(UEP-1)之间鞍结点分岔的结果。在伪静态模型下，发现如果这个UEP-1具有大功角、高电压特点，那么系统出现功角失稳，如果这个UEP-1具有小功角、低电压特点，那么系统出现电压失稳。文献[115]注意到故障轨迹穿过稳定边界后将会被主导UEP的流形所捕获，所以这个主导不稳定平衡点可以反映系统失稳后的形态。文献[116]将文献[115]的方法和能量函数法的思想相结合，从运动稳定性的角度看平衡点性质区别电压和功角稳定。文献[116]认为低电压、小功角(高电压、大功角)的UEP的不稳定流形主要是沿母线电压(发电机节点功角)的变化方向，当系统状态被此不稳定流形捕获后，将导致电压的迅速下降(功角迅速增大)，从而该系统以电压失稳(功角失稳)为主导。文献[117]提出一种启发式的计算方法来搜索主导UEP，但是这种方法并不能保证求得正确的主导UEP。文献[118]基于结构保留模型的稳定域边界理论^[119]，从理论上研究了电力系统暂态期间电压崩溃的能量函数法。暂态期间的电压崩溃可能是发电机功角变化时，暂态过程中潮流方程出现分岔的结果。文献[120]基于此理论提出了基于UEP和奇异点位置的失稳模式识别方法。文献[121]进一步考虑感应电动机模型，提出了通过仿真曲线识别奇异点与失稳模式的方法。

除了上述方法，目前也有少量文献从人工智能的角度研究功角、电压耦合失稳的评估模型。例如，文献[122]提出引入挤压激励网络模块的改进神经网络，文献[123]提出一种融合虚拟对抗训练和均值教师模型的半监督学习框架，实现功角电压耦合失稳模式识别。该类方法具有很强的数据挖掘能力，但其可靠性的研究仍处于初步阶段。

1.3 本文的主要工作

1.3.1 研究问题

本文的研究主要围绕以下两个方面：

1) 稳定边界特征的挖掘：从网络结构的角度挖掘功角稳定边界的能量性质和从线性性质指标的角度发现电压稳定临界点的特征，为提高失稳检测方法和可靠性提供理论基础。

2) 耦合现象的数学理论解释：利用稳定域边界理论分析不稳定平衡点附近的轨

迹性质，以及利用几何奇异摄动理论分析奇异点附近的轨迹性质，为耦合失稳现象提供了机理解释。

本文旨在回答以下问题：

- 1) 如何利用较少的量测数据提高功角失稳在线检测方法的速度和提高可靠性？
- 2) 如何同时提高电压失稳在线检测方法的速度和精度？
- 3) 如何厘清功角/电压耦合失稳原因、条件，有哪些新的现象？
- 4) 如何识别功角/电压耦合失稳的不同原因，有哪些典型的耦合的场景？

1.3.2 框架路线

本文的研究框架如图 1-4 所示。第 2 章和第 3 章中失稳检测的特征是第 4 章的耦合机理的表现，也是第 5 章耦合场景的基础。第 4 章的耦合机理分析是第 5 章的定量评估耦合强弱和耦合场景识别方法的理论基础。第 6 章总结了全文的研究结论，并对未来的工作进行了展望。

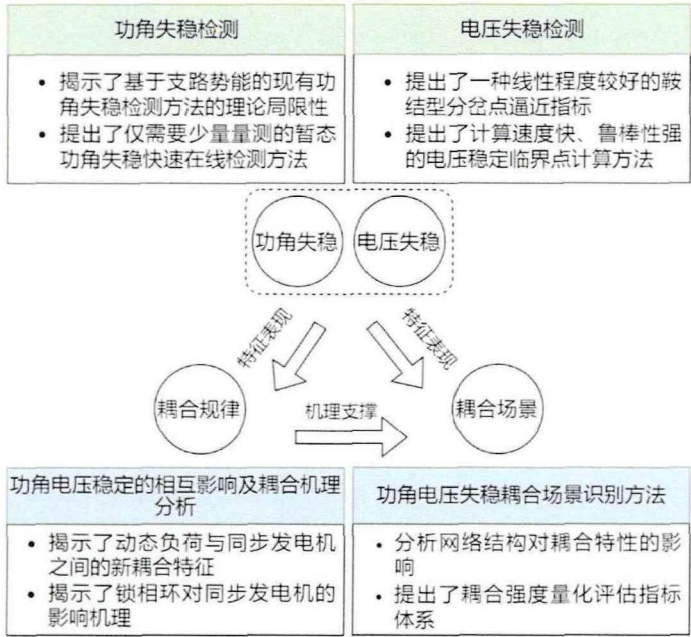


图 1-4 本文的研究内容

Fig.1-4 Research content of this paper

针对研究问题，本文的主要研究内容如下：

(1) 第 2 章利用网络割集性质提升功角失稳在线检测的速度和可靠性。与基于同步发电机功角量测的方法相比，基于割集线路的方法在大电网中依赖更少的量测数据。首先，基于电力网络暂态能量的结构特征提出暂态稳定边界的支路功率表示形式。然后，揭示了现有支路势能判据忽略负荷势能和临界割集依赖的理论局限性，解释了现有指标检测速度慢的原因。最后，提出多种改进判据，依赖更少的量测实现更早地失稳预判。

(2)第3章提出了综合连续潮流法和直接法的电压稳定临界点混合计算方法,兼具速度快、精度高、数值稳定性好的优点。电压失稳在线检测的本质是开发高效算法计算代数方程奇异解。首先利用临界点的性质,提出一种近似线性的鞍结型分岔点逼近指标。然后基于该指标提出电压稳定临界点的混合计算方法,该方法不需要连续潮流计算穿过分岔点,一方面避免连续潮流为解决收敛问题而增加的计算量,另一方面又能够为直接法找到接近临界点的合理初值,从而保证直接法的收敛性。最后,将所提方法拓展到大扰动后的奇异点计算。

(3)第4章通过分析不稳定平衡点和奇异点附近的轨迹性质探究功角失稳与电压失稳的耦合机理。一方面,通过同步发电机功角子系统与电动机电压子系统的稳定域分析,基于子系统不稳定平衡点的性质分析了互联系统不稳定平衡点附近的轨迹性质,解释了功角、电压失稳在不稳定平衡点附近耦合的原因。另一方面,基于同步发电机功角-锁相环动力学方程分析了大量变流器接入电网时锁相环与同步发电机功角耦合的条件。运用几何奇异摄动理论,从理论层面解释了锁相环失去平衡点时同步发电机动态与锁相环动态耦合的原因。通过解析发电机转速解释了同步发电机功角与锁相环耦合的新现象。

(4)第5章通过稳定裕度与距离奇异点裕度的量化指标,构造了识别功角/电压耦合强度评估指标与提出了耦合失稳场景识别方法。基于奇异点附近的功角/电压耦合特性。计及网络结构和负荷水平,研究典型的功角/电压耦合失稳场景分类方法;分析了同步发电机功角与负荷电压、同步发电机功角与变流器电压之间的相互作用模式。提出了功角稳定与电压稳定的量化评估指标体系,并基于功角/电压的耦合机理提出了耦合强度评估指标。

第 2 章 基于支路势能的功角失稳在线检测方法

2.1 引言

尽管现有研究提出了很多的功角失稳在线检测方法,但仍存在一些局限:1)大多数基于发电机测量的方法依赖于所有发电机的运动信息,或者是仅适用于单个发电机相对于其他机组的失步。对数据实时传输和控制中心的依赖降低了方法的可靠性;2)由于上述方法中网络结构变量和运行变量的从属地位,很难确定网络对暂态稳定影响的物理性质。

本章从网络中能量的角度研究了功角失稳的检测方法。首先,研究了电力系统暂态功角失稳过程中的能量特征。基于暂态能量在电力网络中的 Dirac 结构特征,导出了网络中发电机动能和支路势能(LPE, Line Potential Energy)的关系,以及基于支路势能的暂态稳定域边界的表达形式。然后,分析了现有支路势能判据的理论局限性,改进了原有理论推导方法,扩展了现有方法应用于检测暂态功角失稳的适用条件。最后,提出了一种基于局部量测的暂态功角失稳快速检测方法,该方法具有检测失稳时间短、易实现的优势。

2.2 电力网络的功角失稳特征

2.2.1 基于结构保留模型的支路势能函数推导

假设电力系统由 m 台发电机,其发电机的转子方程如式(2-1)-(2-3)所示。由于式(2-3)可以根据所需的发电机模型进行修改,例如二阶或更高阶模型,因此未指定发电机的模型。

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \omega_i \quad (2-1)$$

$$M_i \frac{d\omega_i}{dt} = P_{mi} - P_{ei} - \frac{M_i}{M_T} P_{coi} \quad (2-2)$$

$$P_{ei} = f(\delta_i, \phi_{Gi}) \quad (2-3)$$

($i=1,2,\dots,m$)

式中 δ_i ——第 i 台发电机在惯性中心参考系下的功角;

ω_i ——第 i 台发电机在惯性中心参考系下的转速相对于额定值的偏差;

M_i ——第 i 台发电机的惯性时间常数;

P_{mi} 、 P_{ei} ——第 i 台发电机的机械功率、电磁功率;

ϕ_{Gi} ——惯性中心坐标系下第 i 台发电机出口母线的电压相位,如图 2-1 所示。

其中, $P_{COI} = \sum_{i=1}^m (P_{mi} - P_{ei})$, $M_T = \sum_{i=1}^m M_i$ 。

图 2-1 表示了具有 m 台发电机、 ns 条网络线路和 nl 个负荷节点的电力系统。为了便于描述,第 1 到第 m 支路是发电机支路,第 $(m+1)$ 到第 $(m+ns)$ 条支路是网络线路,第 $(m+ns+1)$ 到第 $(m+ns+nl)$ 条支路是并联的负荷元件, $n=m+ns+nl$ 。在无损网络中,多机系统的能量函数 V 定义为^[124]:

$$V = V_{KE} + V_{PE} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m M_i \omega_i^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i^s}^{\sigma_i} [P_i(\theta_i) - P_i^s] d\sigma_i \quad (2-4)$$

式中 V_{KE} ——系统中发电机的总动能;

V_{PE} ——系统中的总支路势能 (总 LPE);

σ_i ——相角差;当 i 表示网络线路(两端母线编号分别为 k, l)时 $\sigma_i = \phi_k - \phi_l$, ϕ_i 表示母线 i 的电压相角;当 i 表示发电机时 $\sigma_i = \delta_i - \phi_{Gi}$;当 i 表示负荷母线时 $\sigma_i = \phi_{Li}$, ϕ_{Li} 表示惯性基准中心第 i 个负荷节点电压的相角;

σ_i^s ——故障切除后 σ_i 在稳定平衡点处的数值;

s_i ——积分变量,含义与 σ_i 相同;

P_i ——第 i 台发电机、线路或负荷的有功功率;

P_i^s ——故障后稳定平衡点处的 P_i 值。

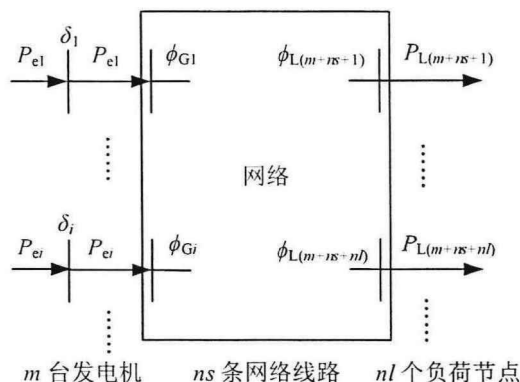


图 2-1 系统中电气元件的简化图

Fig.2-1 Simplified diagram of the electrical components in the system

V_{PE} 中每个元件的贡献称为支路势能 (LPE)。应该注意的是,系统中的所有元件,包括负荷元件,都包含在 V_{PE} 中。这种关系还体现为电力网络的 Dirac 结构特征^[125],特勒根定理是其特例。特勒根定理的一种功率-相角形式为:

$$(\mathbf{P}^a)^T \boldsymbol{\sigma}^b = 0 \quad (2-5)$$

式中 $\mathbf{P}^a$ ——支路有功功率向量,满足 $\mathbf{B}\mathbf{P}^a = 0$, 具有基尔霍夫电流定律的形式。

$\mathbf{B}$ 为电力网络关联矩阵。

σ^b ——支路两端电压相位差向量, 满足 $\sigma^b = B^T \theta^b$, 具有基尔霍夫电压定律的形式。 θ^b 表示节点电压相位。

由于 P^a 、 σ^b 可以相互独立, 因此对于无损网络^[48], 式(2-5)中可以取 $P^a = [P_i - P_i^s]_{i=1, \dots, m+ns+nl}^T$, $\sigma^b = [d\sigma_i]_{i=1, \dots, m+ns+nl}^T$, 然后求积分得到式(2-4)。

2.2.2 暂态稳定边界的功率形式表示

并非所有发电机动能都与功角稳定性高度相关, 功角失稳通常发生在机群之间, 因此只有机群之间的相对动能才能导致失步情况^[126]。其理论解释可以来源于慢不变流形理论^[127]以及同步运动的宏观、微观分解^[128]。如图 2-2 所示, 根据割集支路将电网分为网络 S 和网络 A , 两者之间由割集支路连接。在每个网络中, 网络中的发电机等效于惯性中心发电机, 负荷也被等值。不妨假设在系统失稳时网络 S 中的发电机功角超前于网络 A 中的发电机功角。

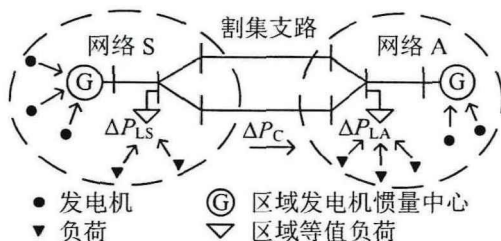


图 2-2 电网简化示意图

Fig.2-2 Simplified schematic diagram of a power grid

假设网络 S 中发电机的功角大于网络 A 中的功角, 则两个机群之间的相对动能 V_{KE2} 定义为^[126]。

$$V_{KE2} = \frac{1}{2} \frac{M_S M_A}{M_S + M_A} \omega_2^2 \quad (2-6)$$

式中 ω_2 ——两个等效机群之间的转速差, $\omega_2 = \omega_S - \omega_A$;

M_S 、 M_A —— S 、 A 机群的等效惯性时间常数, $M_S = \sum_{i \in S} M_i$, $M_A = \sum_{i \in A} M_i$;

ω_S 、 ω_A —— S 、 A 机群的等效转速, $\omega_S = \sum_{i \in S} M_i \omega_i / M_S$, $\omega_A = \sum_{i \in A} M_i \omega_i / M_A$ 。

根据相对动能 V_{KE2} 定义了满足式(2-7)的相对支路势能(相对 LPE) V_{PE2} 。

$$V_{KE2}(t_0, t_1) + V_{PE2}(t_0, t_1) = 0 \quad (2-7)$$

与式(2-4)类似, 根据势能边界面法或扩展等面积法则, 当轨迹穿过稳定边界时, 势能或者减速面积达到最大值, 但动能不等于 0, 因此稳定域边界表示如下:

$$dV_{PE2}/dt = 0 \quad (2-8)$$

$$d^2 V_{PE2}/dt^2 < 0 \quad (2-9)$$

$$\omega_2 \neq 0 \quad (2-10)$$

按照式(2-7)定义的相对 V_{PE2} ，可以通过网络的 Dirac 结构特征，推导得到其各个分量表达式，详细推导见附录 A。

$$V_{PE2} = V_{PEC2} + V_{PEL2} + V_{PEloss2} \quad (2-11)$$

$$\text{其中, } V_{PEC2} = \int_{t_0}^{t_1} \Delta P_C \omega_2 dt, \quad V_{PEL2} = \int_{t_0}^{t_1} \Delta P_{L2} \omega_2 dt,$$

$$V_{PEloss2} = \int_{t_0}^{t_1} (\Delta P_{loss2} + \Delta P_{Closs}) \omega_2 dt,$$

$$\Delta P_{L2} = (\Delta P_{LS} M_A - \Delta P_{LA} M_S) / (M_S + M_A), \quad \Delta P_{LS} = \sum_{\substack{i=m+ns+nl \\ l \in S}}^{m+ns+nl} P_{L,i} - P_{L,i}^s,$$

$$\Delta P_{LA} = \sum_{\substack{i=m+ns+nl \\ l \in A}}^{m+ns+nl} P_{L,i} - P_{L,i}^s, \quad \Delta P_C = \sum_{k \in S} \sum_{l \in A} P_{k,l} - P_{k,l}^s.$$

式中 V_{PEC2} 、 V_{PEL2} 、 $V_{PEloss2}$ ——相对 LPE 分别在割集支路、负荷支路、网络电导部分的分量；

ΔP_C 、 $P_{k,l}$ 、 $P_{k,l}^s$ ——从网络 S 流向网络 A 的割集功率之和与稳态值之差、流过网络线路(两端母线编号分别为 k,l)的功率、及其故障后平衡点；

ΔP_{L2} 、 ΔP_{LS} 、 ΔP_{LA} 、 $P_{L,i}$ 、 $P_{L,i}^s$ ——系统的整体等效负荷功率与故障后平衡点之差、网络 S 和网络 A 中的等效负荷功率与故障后平衡点之差、第 i 条母线所连负荷的功率、及其故障后平衡点处的值；

ΔP_{loss2} 、 ΔP_{Closs} ——两机群内、两机群间的等效功率损耗与故障后平衡点之差。

根据式(2-7)中 V_{PE2} 的定义，一些关于动能的结果，例如稳定边界，可以转化为网络中线路和负荷的相对 LPE 的表达式。这种方法更容易揭示 LPE 失稳判据的应用条件。

基于式(2-7)-(2-11)，暂态功角稳定的临界状态表示如下：

$$\Delta P_{L2} + \Delta P_C + \Delta P_{loss2} + \Delta P_{Closs} = 0 \quad (2-12)$$

$$\frac{d(\Delta P_{L2} + \Delta P_C + \Delta P_{loss2} + \Delta P_{Closs})}{dt} \omega_2 < 0 \quad (2-13)$$

由于线路电导远小于负荷电导，因此 ΔP_{loss2} 和 ΔP_{Closs} 远小于式(2-12)和(2-13)中的 ΔP_{L2} 。基于两机等效，式(2-12)表明割集支路功率和等效负荷功率决定了发电机功角失稳。

2.3 改进支路势能判据的理论分析

2.3.1 支路势能判据的表达形式与理论缺陷

基于割集支路的 LPE 建立判据，以判断发电机的功角稳定性。它有不同的表达形式^[43,47,48]，例如式(2-14)、(2-15)和(2-16)，它们都源自同一原理。

$$V_{KE} + \sum_{i \in C} \int_{\sigma_i}^{\sigma_i(0)} (P_i - P_i^s) d\theta_i \geq v_{i0}^+, \quad (2-14)$$

$$\begin{cases} P_k(t_{b,k}) - P_k^s = 0, k \in C \\ dP_k(t_{b,k})/dt \neq 0 \end{cases} \quad (2-15)$$

$$\begin{cases} P_i(t) - P_i^s \leq 0, \forall i \in C \\ \sigma_i(t) > \sigma_{\min}, \forall i \in C \\ |d\sigma_i(\xi)/dt| > 0, \forall i \in C, \xi \in [t_0, t] \end{cases} \quad (2-16)$$

式中 C ——参考方向为从超前机群到滞后机群的割集支路集合，

σ_i^s 、 $\sigma_i(0)$ 、 $\sigma_{\min}$ ——故障后稳定的平衡点、故障清除后的状态、阈值^[48]。

v_{i0}^+ ——对应于所选割集和不稳定平衡点 (UEP) 的割集脆弱性指数^[43,124]；

$t_{b,k}$ ——故障清除后第 k 条线路的 LPE 达到其第一个最大值的时间^[47]；

在本章中，采用如下式(2-17)的形式与现有的 LPE 判据进行对比分析。式(2-17)是式(2-16)的必要条件，判断时刻更早，也更容易与本章所提指标将进行对比。

$$\begin{cases} \Delta P_C = \sum_{k \in C} P_k - P_k^s \leq 0 \\ \sigma_k(t) > \sigma_{\min}, \forall k \in C \\ |d\sigma_k(\xi)/dt| > 0, \forall k \in C, \xi \in [t_0, t] \end{cases} \quad (2-17)$$

根据式(2-12)，如果忽略线损，则 LPE 失稳判据可以定义为式(2-18)，这与式(2-15)和(2-16)非常相似。本章的其余部分以式(2-18)的形式描述了 LPE 判据，因为它可以被视为式(2-16)的必要条件，并且检测系统失稳的时间比式(2-16)的检测时间稍早。此外，使用这种形式更便于基于双机等价理论的分析。

$$\begin{cases} \Delta P_{L2} + \Delta P_C = 0 \\ \frac{d(\Delta P_{L2} + \Delta P_C)}{dt} \omega_2 < 0 \end{cases} \quad (2-18)$$

LPE 判据由结构保持能量函数导出，因为割集支路的 LPE 决定了发电机功角的稳定性。该推理过程通过以下四个步骤进行说明^[47,48,129]：

第 1 步：系统的功角失稳可以通过能量函数分析得出，例如势能边界法。系统的总能量表示为动能和势能之和，如式(2-4)所示。

第 2 步：在结构保持模型的能量函数中，发电机的势能可以表示为串联元件（传输线、变压器和发电机暂态电抗）的 LPE 的总和^[130]。

第 3 步：在一些假设下，串联元件的 LPE 可以表示为“临界割集”的 LPE，其中的线路被称为“饱和线路”^[124,131]，而其他串联元件的 LPE 小到可以忽略。“临界割集”在这里指暂态功角失稳后角度差超过 180 度的支路构成的割集。

第 4 步：由于前面的步骤 1-3，可以根据割集的 LPE 确定系统的功角失稳。

然而，从表面上看，该方法的适用性似乎有两个局限性。

1) 局限性 1：假设负荷功率恒定，由此忽略了阻抗型负荷的影响。

在第 2 步中，总 V_{PE} 不仅包括串联元件，还包括并联元件（负荷和除发电机外的任何其他功率注入设备），如式(2-4)所示。如果并联元件没有恒定的有功功率，并联支路的势能通常并不能足够小到能够忽略，在这种情况下，有必要包含并联元件的 LPE。

2) 局限性 2：失稳判据过分强调“临界割集”。

在第 3 步中，“临界割集”存在两个问题：i) 临界割集中各条线路通常不会同时达到其势能最大值，即 $P_k - P_k^s = 0$ ，文献[44]中分析了这种现象的原因。临界割集中某些线路的两端电压相角差变化更慢，因此在线识别临界割集容易导致暂态失稳检测的延迟^[132]。如果等到临界割集中所有线路预测失稳，这会增加系统失稳检测的延时。ii) 临界割集可能会漂移^[133,134]。如果割集选择非常灵活，或者割集是基于现有 PMU 测量值选择的，则 LPE 判据更容易在线应用。本节的改进推理逻辑以及 2.3.3 节的分析结果表明，LPE 判据在理论上不需要依赖于临界割集。但在本章提出的改进方法中，利用了临界割集或其附近线路的其他信息来缩短失稳检测时间。

本节部分通过以下推理逻辑，从理论上改进了该检测判据的适用性：

第 1 步：通过分析机群的相对动能 V_{K2} 和对应的相对势能 V_{PE2} 来表示系统的功角稳定域边界，如式(2-8)-(2-10)。

第 2 步：基于网络的 Dirac 结构，发电机的相对势能 V_{PE2} 可以表示为割集支路分量 V_{PEC2} 、负荷支路分量 V_{PEL2} 和网络电导部分分量 $V_{PEloss2}$ 的总和，如式(2-7)中 V_{PE2} 所示。稳定域边界式(2-8)-(2-10)可以表示为式(2-12)-(2-13)，其中网络电导部分分量 ΔP_{loss2} 和 ΔP_{Closs} 可以忽略。

第 3 步：基于分群同调的假设，本节的分析结果表明，割集的功率 ΔP_C 在相位上落后于等值负荷功率 ΔP_{L2} 约 $\pi/2$ 。且根据本章的命题 2.1，割集的相对 LPE 可以推断整个系统的相对 LPE 的最大值。

步骤 4：根据步骤 1-3，原有的 LPE 判据，式(2-17)，可以检测系统的功角失稳。

基于以上推理逻辑，拓展了现有理论推导的限制。前面所描述的局限性 1 和局限性 2 不足以妨碍 LPE 判据的适用性，经过一些改进的方法可以有效地使用。本节

提出了三种简单有效的策略来改进 LPE 判据。这些策略可以同时使用，也可以在适当的情况下单独使用，为其在本章第 2.4 节的在线检测方法提供了理论支持。

2.3.2 负荷注入系统的暂态能量特征

在本小节中，我们将基于两机等值，讨论负荷的相对 LPE 对发电机功角稳定性的影响。除发电机和负荷外，所有母线均已消去。系统中母线电压和注入电流的方程式如式(2-19)所示。

$$\begin{pmatrix} -I_L \\ I_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{LL} & Y_{LG} \\ Y_{GL} & Y_{GG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_L \\ E_G \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

式中 I_L 、 I_G ——负荷流出网络和发电机流入网络的电流相量；

V_L ——负荷节点的母线电压相量；

E_G ——发电机的内部电动势相量， $E_{Gi} = |E_{Gi}| \angle \delta_i$ 。

假设恒定阻抗负荷，即 $I_L = [Y_L]V_L$ ，其中 $[Y_L] = \text{diag}(Y_{Li})$ 表示对角线由负荷导纳 Y_{Li} 组成的对角线矩阵。因此，负荷母线电压相量 V_L 可以改写为式(2-20)：

$$V_L = Z_{LL} Y_{LG} E_G \quad (2-20)$$

其中， $Z_{LL} = -([Y_L] + Y_{LL})^{-1}$ 。

根据机群 S 和机群 A 的划分， E_G 可分为两个向量 E_{GS} 和 E_{GA} ， V_L 也可分为两个向量 V_{LS} 和 V_{LA} 。因此，等式(2-20)可以改写为以下形式：

$$\begin{pmatrix} V_{LS} \\ V_{LA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{SS} & Z_{SA} \\ Z_{AS} & Z_{AA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{LGS} & 0 \\ 0 & Y_{LGA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{GS} \\ E_{GA} \end{pmatrix} \quad (2-21)$$

假设失步现象为两个机群之间失步，那么机群 S 与机群 A 中发电机内电势可以分别表示为：

$$E_{GS} = E_{GS}^s \exp(j(\delta_s - \delta_s^s)), \quad (2-22)$$

$$E_{GA} = E_{GA}^s \exp(j(\delta_A - \delta_A^s)), \quad (2-23)$$

式中 δ_s 、 δ_A ——机群 S 和 A 功角的惯性中心， $\delta_s = \sum_{i \in S} M_i \delta_i / M_s$ ，

$$\delta_A = \sum_{i \in A} M_i \delta_i / M_A ;$$

E_{GS}^s 、 E_{GA}^s 、 δ_s^s 、 δ_A^s —— E_{GS} 、 E_{GA} 、 δ_s 、 δ_A 在平衡点处的值。

基于式(2-21)、(2-22)和(2-23)，每个母线电压都可以表示为 δ_s 和 δ_A 的函数。因此，式(2-11)中的 ΔP_{LS} 、 ΔP_{LA} 和 ΔP_C 可以改写为以下形式：

$$\Delta P_{LS} = P_{LSc} + P_{LSmax} \cos(\delta + \gamma_{LS}), \quad (2-24)$$

$$\Delta P_{LA} = P_{LAc} + P_{LAmax} \cos(\delta + \gamma_{LA}), \quad (2-25)$$

$$\Delta P_C = P_{Cc} + P_{Cmax} \cos(\delta + \gamma_C), \quad (2-26)$$

其中, 当 $|E_G|$ 恒定时 P_{LSc} 、 P_{LSmax} 、 γ_{LS} 、 P_{LAc} 、 P_{LAmax} 、 γ_{LA} 、 P_{Cc} 、 P_{Cmax} 、 γ_C 是常数, 且 δ 满足 $d\delta/dt = \omega_2$ 和 $\delta = (\delta_S - \delta_S^s) - (\delta_A - \delta_A^s)$ 。 P_{LSmax} 、 γ_{LS} 、 P_{Cmax} 和 γ_C 描述了随发电机功角变化的功率分量。由于它们的表达式相当长, 包括 P_{Cc} 和 P_{L2c} , 详见附录 A。

通常, γ_{LS} 与 γ_{LA} 接近。因此, 式(2-7)中 ΔP_{L2} 的形式简化如下:

$$\Delta P_{L2} \approx P_{L2c} + P_{L2max} \cos(\delta + \gamma_{L2}) \quad (2-27)$$

其中, $P_{L2c} = (P_{LSc} M_A - P_{LAc} M_S) / (M_S + M_A)$,

$$P_{L2max} = \frac{P_{LSmax} M_A - P_{LAmax} M_S}{M_S + M_A} \cos\left(\frac{\gamma_{LS} - \gamma_{LA}}{2}\right), \quad \gamma_{L2} = (\gamma_{LS} + \gamma_{LA})/2。$$

上述参数和变量具有以下属性。 $\delta > 0$ 表示网络 S 中的发电机领先于网络 A 中的发电机。 γ_{LS} 和 γ_{LA} 约为 0, γ_C 约为 $-\pi/2$ 。分析过程如附录 A 末尾所示。网络 S 中发电机的惯性通常小于网络 A 中发电机的惯性, $M_A \gg M_S$ 。此外, 由于 $P_{LSmax} > 0$ 和 $P_{LAmax} > 0$, 所以 $P_{L2max} > 0$ 。

网络 S 和网络 A 中的发电机分别等效于发电机群 S 和发电机群 A , 如图 2-2。假设等值两机系统具有稳定的平衡点, 此时可以导出 $d f(\delta)/d\delta$ 的符号。

引理 2.1: 系统平衡点稳定的必要条件是 $d f(0)/d\delta > 0$ 。

由于等式(2-1) 和(2-2), 等效发电机的转子运动方程可以表示如下。

$$\frac{d\delta_l}{dt} = \omega_l, \quad (l=S, A) \quad (2-28)$$

$$\frac{d\omega_l}{dt} = \frac{\Delta P_{Gl}}{M_l} - \frac{1}{M_T} P_{COI}, \quad (l=S, A) \quad (2-29)$$

通过从等效发电机 S 的转子方程中减去等效发电机 A 的转子方程, 并使用 $\delta_2 = \delta_S - \delta_A = \delta + \delta_S^s - \delta_A^s$ 和 $\omega_2 = \omega_S - \omega_A$ 作为状态变量, 将平衡点附近的线性化模型定义为:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\Delta\delta_2}{dt} \\ \frac{d\Delta\omega_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_S}{M_S} - \frac{K_A}{M_A} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\omega_2 \end{bmatrix}, \quad (2-30)$$

其中, $K_S = d\Delta P_{GS}/d\delta_2$, $K_A = d\Delta P_{GA}/d\delta_2$ 。

方程(2-30)的系数矩阵的特征值等于:

$$\lambda = \pm \sqrt{K_S/M_S - K_A/M_A}。 \quad (2-31)$$

令

$$f(\delta) = \Delta P_{L2}(\delta) + \Delta P_C(\delta) \quad (2-32)$$

将式(A-1)和(A-2)代入式(2-31), 消去 ΔP_{GS} 和 ΔP_{GA} 。如果忽略线损部分的功率, 得到式(2-33):

$$\lambda = \pm \sqrt{-d(\Delta P_C + \Delta P_{L2})/d\delta_2} = \pm \sqrt{-df(\delta)/d\delta} \quad (2-33)$$

因此, 如果 $df(\delta)/d\delta < 0$, 则特征值的实部为正, 平衡点不稳定。当 $df(\delta)/d\delta = 0$ 时, 系统有两个零特征值, 是临界稳定的。当 $df(\delta)/d\delta > 0$ 时, 系统有两个虚特征值。由于上述分析过程中忽略了阻尼, 此时系统在正阻尼下静态稳定。因此, 系统平衡点稳定的必要条件是 $df(0)/d\delta > 0$, 这与同步功率系数类似^[6]。

命题 2.1: 当满足以下条件时: $\delta > 0$, $\gamma_C \in (-\pi + |\gamma_{L2}|, 0)$, $df(0)/d\delta > 0$ 和 $P_{L2\max} > 0$, 在 0 到 $-2\gamma_C$ 之间的区间至少存在一个 δ 值满足 $f(\delta) = 0$ 。

证明:

由于 $\Delta P_{L2}(\delta) = P_{L2c} + P_{L2\max} \cos(\delta + \gamma_{L2})$, $\Delta P_C(\delta) = P_{Cc} + P_{SA\max} \cos(\delta + \gamma_C)$, $\Delta P_{L2}(0) = 0$, $\Delta P_C(0) = 0$, $\Delta P_C(-2\gamma_C) = 0$ 。

因此,

$$f(0) = 0, \quad (2-34)$$

当 $\gamma_C \in (-\pi + |\gamma_{L2}|, 0)$, 且 $P_{L2\max} > 0$ 时, 下面的式子成立:

$$P_{L2\max}(\cos(-2\gamma_C + \gamma_{L2}) - \cos\gamma_{L2}) < 0. \quad (2-35)$$

由于 $P_{L2c} = -P_{L2\max} \cos\gamma_{L2}$, 因此:

$$\begin{aligned} f(-2\gamma_C) &= \Delta P_{L2}(-2\gamma_C) = P_{L2c} + P_{L2\max} \cos(-2\gamma_C + \gamma_{L2}) \\ &= P_{L2\max}(\cos(-2\gamma_C + \gamma_{L2}) - \cos\gamma_{L2}) < 0 \end{aligned} \quad (2-36)$$

如果 $\gamma_C \in (-\pi + |\gamma_{L2}|, 0)$ 且

$$f'(0) > 0, \quad (2-37)$$

根据零点定理, 由于式(2-34)、(2-36)和(2-37)的条件, 在区间 $(0, -2\gamma_C)$ 中式(2-32)的 $f(\delta)$ 至少存在一个零点。证毕。

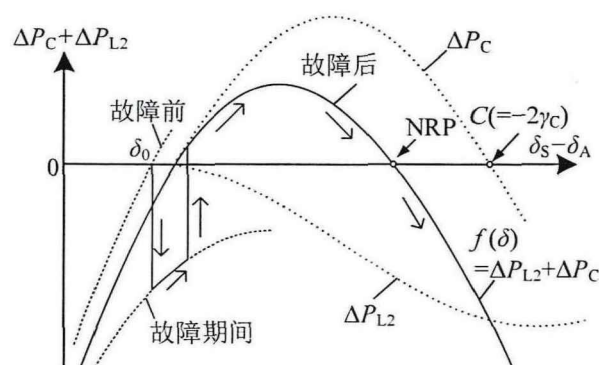


图 2-3 失稳情况下的 P_C 和 ΔP_{L2} 曲线

Fig.2-3 ΔP_C and ΔP_{L2} curve of the unstable case

命题 2.1 的条件在前面一一进行了说明。根据命题 2.1, 检测 $\Delta P_C = 0$ (当 $\delta = -2\gamma_C$ 时) 可以代替检测 $\Delta P_{L2} + \Delta P_C = 0$ 。这就是即使忽略负荷功率分量 ΔP_{L2} , LPE 的失稳判据在理论上也是可行的原因。但从该方法的原理上, LPE 的失稳判据检测系统暂态

失稳的时间晚于直接检测发电机功角 NRP 点的方法，如图 2-3 所示：

命题 2.1 也适用于具有恒定功率负荷的系统。如果恒定功率负荷不会导致电压崩溃（如奇异点引起的电压失稳），则恒定功率负荷不会对等式(2-7)中的相对 LPE 产生影响。然而，实际电力系统中，如果功角失稳引起电压稳定问题，恒功率负荷的模型可能不再适用^[135]。在暂态过程中，许多仿真程序中也会在电压低于某个特定值时将恒定功率负荷转换为阻抗，因为在实际情况下，当电压非常低时，很难维持负荷功率。仿真程序中例子包括 PSS/E^[136]、PSCAD/EMTDC 中的固定负荷以及 SIMULINK 中的三相动态负荷。关于功角失稳和电压失稳的耦合问题将在第 4 章、第 5 章中讨论。

2.3.3 割集选择的影响

由于局限性 2，需要选择临界割集。尽管已有选择临界割集（或脆弱割集）的方法，但本小节证明了失步检测的割集不限于临界割集。

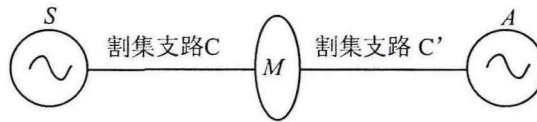


图 2-4 具有相同发电机机群划分的两条不同割集支路（C 和 C'）。

Fig.2-4 Two different cutset lines (C and C') with the same generator cluster division

如等式(2-7)所定义，具有相同分割的割集支路 C 和 C' 提供相同的 V_{KE2} 和 V_{PE2} 。两条不同的割集支路提供了不同的 V_{PEC2} 和 V_{PEL2} （以及不同的 $V_{PEloss2}$ ），但因为 $\Delta P_C + \Delta P_{L2}$ 几乎保持不变，所以 $V_{PEC2} + V_{PEL2}$ 几乎保持不变（因为与 V_{PEL2} 相比， $V_{PEloss2}$ 可以忽略）。

ΔP_{L2} 和 ΔP_C 指与割集 C 相关的等效负荷功率与割集功率， $\Delta \tilde{P}_{L2}$ 和 $\Delta \tilde{P}_C$ 表示与割集 C' 相关的功率。因此， $\Delta \tilde{P}_{L2}$ 、 $\Delta \tilde{P}_C$ 与 ΔP_{L2} 、 ΔP_C 具有以下关系：

$$\Delta \tilde{P}_{L2} = \frac{(\Delta P_S + \Delta P)M_A - (\Delta P_A - \Delta P)M_S}{M_A + M_S} = \Delta P_{L2} + \Delta P \quad (2-38)$$

$$\Delta \tilde{P}_C \approx \Delta P_C - \Delta P \quad (2-39)$$

其中， $\Delta P = \sum_{i \in M} P_{L,i} - P_{L,i}^s$ 。

因此， $\Delta \tilde{P}_{L2} + \Delta \tilde{P}_C \approx \Delta P_{L2} + \Delta P_C$ 。如前所述，只要满足命题 2.1 中的条件，式(2-16)就可用于检测功角稳定性。因此，与割集 C 具有相同失稳模式的割集 C' 提供了相同的发电机失稳结果。这一发现表明，对于相同的失稳模式，割集的选择不会影响发电机失步检测的结果。

对于普通割集，由于割集支路的 LPE 不高于其他支路的 LPE，该结果似乎与第

2.3 节第 3 步的要求相矛盾。主要原因是割集支路的 LPE 与相对 LPE V_{PE2} 不同。本节推导过程中的势能是相对 LPE，而不是割集支路的 LPE。此外，角速度差 ω_2 不是由割集支路决定的。因此，使用相对 LPE V_{PE2} 会改变选择割集支路的条件。

这一发现还表明，选择某些割集支路会导致较小的 ΔP_{L2} ，从而导致仅使用 $\Delta P_C=0$ 实现更早的失稳检测。

2.4 改进的暂态功角稳定在线检测方法

2.4.1 判别方法的改进思路

上一节从理论上分析了 LPE 的适用条件，为其在线应用提供了支持。基于以上分析，本节提出了三种简单有效的策略来改进 LPE 判据。前两种策略可以同时使用，也可以在适当的情况下单独使用。第三种策略依赖于更少的 PMU 量测信息，但需要知道一些关于临界割集的信息，可以看作基于广域量测信息的检测方法的补充。

2.4.1.1 基于负荷功率的策略

上述分析表明，负荷功率变化对发电机失步状态的影响会导致 LPE 失稳判据的滞后。因此，本节讨论了一种通过检测少量负荷功率来实现更早地检测系统暂态稳定性的简单方法，但需要一定数量的广域量测信息。

根据等式(2-27)，由于 $M_A \gg M_S$ ， ΔP_{LS} 在 ΔP_{L2} 中占主导地位，只需检测网络 S 中的负荷。由于等式(2-21)，如果检测的负荷母线设置为集合 N ， $N \in S$ ，则集合 N 中的负荷功率可以写成与(2-24)类似的等式(2-40)。

$$\Delta P_{LS,N} = P_{LSc,N} + P_{LSmax,N} \cos(\delta + \gamma_{LS,N}), \quad (2-40)$$

其中， $P_{LSc,N}$ ， $P_{Smax,N}$ ，和 $\gamma_{LS,N}$ 是常数。可通过在等式(2-24)中或者附录 A 中的表达式(A-8)中将负荷电导 G_{Li} （除集合 N 中的负荷母线外）设置为零即可直接导出其表达式。

当 $\gamma_{LS,N} \approx \gamma_{LS}$ ，区域 S 中等效负荷功率的变化可通过以下方式近似计算：

$$\Delta P_{LS} \approx \alpha \Delta P_{LS,N} = \alpha \sum_{i \in N} (P_{L,i} - P_{L,i}^s) \quad (2-41)$$

其中， $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ ， $\alpha_1 = P_{LSc,N}/P_{LSc}$ ， $\alpha_2 = P_{LSmax,N}/P_{LSmax}$ 。

由于 α_1 和 α_2 近似相等，使用两者中较小的值来确保结果的可靠性。因此，将等式(2-41)替换(2-7)，忽略 ΔP_{LA} ，并获得 ΔP_{L2} 的估计值，如等式(2-42)所示。然后根据(2-18)判断系统是否失稳。

$$\Delta P_{L2} \approx \alpha M_A / (M_A + M_S) \sum_{i \in N} (P_{L,i} - P_{L,i}^s) \quad (2-42)$$

2.4.1.2 基于割集选择的策略

因为割集功率和负荷功率之间的关系，割集位置的选择不会影响相对 LPE 对系统失稳的评估，但会影响评估时间，如图 2-3 所示。因此，当有多个割集可用于检测发电机失稳时，选择某些割集可以更早地评估系统失稳。

根据式(2-27)的分析，由于群 S 和群 A 之间发电机惯量大小的差异， $P_{L2\max} > 0$ 是合理的，即 ΔP_{L2} 通常为正值。此外，在发电机功角摆开过程中，系统中的母线电压降低。因此，根据等式(2-38)，由靠近机群 S 的割集 C 获得的 ΔP_{L2} 比由靠近机群 A 的割集 C' 获得的 $\Delta \tilde{P}_{L2}$ 更接近于 0。如图 2-5 所示，点 F ($\Delta P_C = 0$) 比点 F' ($\Delta \tilde{P}_C = 0$) 更接近点 D ($\Delta P_C + \Delta P_{L2} = 0$ ，如果忽略线路功率损耗，则稳定边界近似由式(2-18)定义)。因此，如果仅监控割集功率的失稳，则割集 C 的点 F 比割集 C' 的点 F' 更早检测到系统失稳。

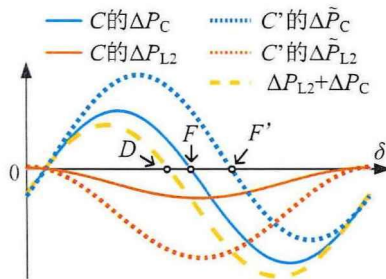


图 2-5 不同割集的 ΔP_C 和 ΔP_{L2} 比较

Fig.2-5 Comparison of ΔP_C and ΔP_{L2} in different cutsets

简言之，当存在多个具有相同发电机组分组模式的割集时，靠近惯性较小的发电机组的割集可以更早地检测到发电机组失稳。一种极端情况是，一台发电机与其他发电机失步；选择发电机出口处割集支路的 LPE，它能够更早地检测发电机功角失稳^[137,138]。

2.4.1.3 基于临界割集量测的策略

虽然 2.3.3 节的理论分析说明 LPE 判据不需要判断临界割集，但临界割集两侧的电压相角量测包含了丰富的信息。因此，通过临界割集可以得到另外的好处，即通过临界割集的少量测量估算 ΔP_{L2} ，实现更早地预测发电机失步。

根据等式(2-26)，我们可以对 P_C 求导得到：

$$dP_C = P_{C\max} \cos(\delta + \gamma_C + \pi/2) d\delta \approx P_{C\max} \cos(\delta + \gamma_{L2}) d\delta, \quad (2-43)$$

然后，通过估计临界割集支路的功率，我们得到等式(2-44)中的 ΔP_{L2} ：

$$\Delta P_{L2} \approx \alpha \left(\frac{dP_C}{d\delta} - \frac{dP_C^s}{d\delta} \right) \quad (2-44)$$

可以使用式(2-45)计算参数 α ； $dP_C^s/d\delta$ 代表稳态下的 $dP_C/d\delta$ 值，可使用式(2-46)

提前计算。 $P_{C\max}$, γ_C , 和 $P_{L2\max}$ 是等式(2-26)和(2-27)中的参数。通过临界割集的局部测量, 可以得到 $dP_C/d\delta$ 。

$$\alpha = P_{L2\max}/P_{C\max} \quad (2-45)$$

$$\frac{dP_C^s}{d\delta} = -P_{C\max} \sin(\gamma_C) \quad (2-46)$$

因此, V_{PE} 相对于式(2-7)中 δ 的导数可以通过式(2-47)估算。除了割集支路对支路势能 ΔP_C 贡献的功率外, 还包括发电机相对于负荷势能的相对运动做出贡献。

$$\frac{dV_{PE2}}{d\delta} \approx \Delta P_C + \Delta P_{L2} \approx \Delta P_C + \alpha \left(\frac{dP_C}{d\delta} - \frac{dP_C^s}{d\delta} \right) \quad (2-47)$$

在失稳边界条件式(2-12)和式(2-13)中, 式(2-12)等价式(2-47)等于 0。因此, 得到基于临界割集量测的判据式(2-48), 它是功角失稳的必要条件。阈值 $\sigma_{\min}$ 在本研究中为 10° , 它有两个功能: 1) 防止振荡引起的功率波动造成错误判断; 2) 在暂态稳定的情况下, 当功角恢复到故障前的状态时, 防止错误估计。

$$\begin{cases} \sum_{k \in C} (P_k - P_k^s + \alpha \frac{dP_k}{d\delta}) - \alpha \frac{dP_C^s}{d\delta} = 0 \\ |\sigma_k(t) - \sigma_k^s| > \sigma_{\min}, \forall k \in C \end{cases} \quad (2-48)$$

式中 σ_k^s ——故障后平衡点处第 k 条临界两端的母线电压相角差, 用故障前的稳态值估计。

2.4.2 基于局部量测的改进支路势能判据

(1) 临界割集的选择

如果电力网络的区域连接具有弱连接结构, 弱连接线路^[127,139]即为临界割集支路。此时临界割集是网络的一种属性, 可以依赖离线数据进行识别。这种情况在实际的区域互联电网中比较常见, 其联络线距离较长、阻抗较大, 容易成为临界割集。如果没有弱连接线路, 那些线路数量少且线路输送有功功率大的割集容易成为临界割集, 因为这样的割集通常对应于势能较小的不稳定平衡点。通过一些高效图分割算法^[140]或者基于图论的平衡点算法^[141]寻求电力网络中这样的最小割集, 可以作为暂态失稳检测的潜在临界割集。

(2) 通过临界割集量测估计关键变量

由于两个发电机群的惯性中心差 δ 的变化无法在本地测量, 使用临界割集支路两端相角的变化率来估计两个发电机组惯性中心的变化率, 因此可以基于更少的 PMU 量测实现快速地检测发电机功角失稳。估算方法如下, 我们假设临界割集支路两端的母线 1 和母线 2 相对于振荡中心对称, 如图 2-6 a)所示:

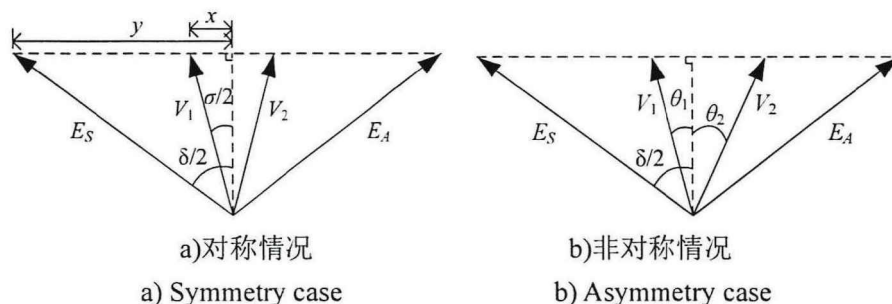


图 2-6 临界割集支路两端母线电压的相量图

Fig. 2-6 Phasor diagram of the bus voltage at two ends of the critical cutset line

令 $\beta = x/y$,

$$\beta \tan \frac{\delta}{2} = \tan \frac{\sigma}{2} \quad (2-49)$$

因为 β 表示母线 1 和等值电势 E_S 到振荡中心的电气距离的比值, 所以近似为常数。上式两边同时对 δ 求导, 得到式(2-50)。

$$\frac{d\sigma}{d\delta} = \beta \frac{1 + (\tan(\delta/2))^2}{1 + (\tan(\sigma/2))^2} \quad (2-50)$$

然后将式(2-49)代入式(2-50), 并消除 δ , 得到式(2-51)。

$$\frac{d\sigma}{d\delta} = \frac{1 + \beta^2 - (1 - \beta^2)\cos\sigma}{2\beta} \quad (2-51)$$

参数 β 与两个发电机组的临界割集支路的位置有关。当两个发电机组摆动 180 度时, 它大约等于临界割集支路末端的母线电压幅值的标么值。通过离线仿真可以很容易地获得参数。当临界割集支路两端的母线电压相量 V_1 和 V_2 不对称时, 也可采用这种计算方法。在这种情况下, 如果电压 V_1 和 V_2 标么值的最低点分别为 β_1 和 β_2 , 则可以使用式(2-52)计算 β 参数。推导见式(2-53)到式(2-57)。 β_1 和 β_2 分别近似于功角摆动期间临界支路两端的最小母线电压。计算 β 的示例见第 2.5 节。

$$\beta = (\beta_1 + \beta_2)/2 \quad (2-52)$$

临界割集支路两端的母线电压非对称时电压相量的示意图如图 2-6 b)所示。电压相量幅值和角度的关系为式(2-53)、(2-54)。

$$\beta_1 \tan \frac{\delta}{2} = \tan \theta_1 \quad (2-53)$$

$$\beta_2 \tan \frac{\delta}{2} = \tan \theta_2 \quad (2-54)$$

由于 $\sigma = \theta_1 + \theta_2$, 得到以下关系:

$$\tan \sigma = \frac{(\beta_1 + \beta_2) \tan(\delta/2)}{1 - \beta_1 \beta_2 (\tan(\delta/2))^2} \quad (2-55)$$

然后根据方程的三角函数关系式(2-55)和(2-56), 求解 $\tan(\delta/2)$, 将得到的等式记作函数关系 $\tan(\delta/2)=g(\cos\sigma)$ 。

$$1/(\cos\sigma)^2 = 1 + (\tan\sigma)^2 \quad (2-56)$$

最后, 对等式(2-55)两边分别对 δ 求导。代入 $\tan(\delta/2)=g(\cos\sigma)$ 消除 δ , 得到式(2-57):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\delta} = & \frac{(1 + \beta_1\beta_2)}{(\beta_1 + \beta_2)} + \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2(1 + \beta_1\beta_2)}{4\beta_1\beta_2(\beta_1 + \beta_2)}(\cos\sigma)^2 \\ & \pm \frac{(\beta_1\beta_2 - 1)\sqrt{\cos\sigma^2(\beta_1 - \beta_2)^2 + 4\beta_1\beta_2}}{4\beta_1\beta_2} \cos\sigma \end{aligned} \quad (2-57)$$

随着 σ 的增加, $d\sigma/d\delta$ 趋于增加; 因此, 等式(2-57)中第二项前面的符号应该是“+”。当 $\sigma=0^\circ$ 时, 式(2-57)取得最小值, 等于 $(\beta_1+\beta_2)/2$, 式(2-51)达到最小值, 等于 β ; 当 $\sigma=180^\circ$ 时, 式(2-57)取得最大值, 等于 $(\beta_1+\beta_2)/(2\beta_1\beta_2)$, 式(2-51)达到最大值, 等于 $1/\beta$ 。由于 $dP_C/d\sigma$ 在 $\sigma=180^\circ$ 时接近于 0, 所以在这小段时间内 $d\sigma/d\delta$ 的计算误差对 $dP_C/d\sigma$ 的估计值的影响可以忽略不计。所以, 式(2-51)中 β 根据 $\sigma=0^\circ$ 时的值计算, $\beta=(\beta_1+\beta_2)/2$ 。

因此, 可以使用式(2-58)计算式(2-47)中的 $dP_C/d\delta$ 。

$$\frac{dP_C}{d\delta} = \sum_k \frac{dP_{C,k}}{d\sigma} \frac{d\sigma_k}{d\delta} \quad (2-58)$$

其中, 下标 k 表示第 k 条临界割集支路。 $dP_{C,k}/d\sigma$ 可以只通过局部测量来计算。根据等式(2-51), $d\sigma_k/d\delta$ 可以仅通过临界割集支路 σ 两端的母线电压相角差得到。

(3) 判别方法的整体计算流程

改进的 LPE 判据检测暂态功角失稳的计算过程分为两部分。第一部分是离线计算参数 α , $dP_C/d\delta$, 和 β_k , 第二种是在线测量临界割集支路的功率和临界割集支路两端之间的角度差 σ_k , 以及在线计算功率量测值的微分 $dP_k/d\delta$ 。

改进的 LPE 判据的计算过程如下:

1) 参数 α 和 $dP_C/d\delta$ 使用式(2-45)和式(2-46)计算。由于参数 α 对故障位置和故障持续时间不敏感, 满足离线设置和在线使用的要求。

2) 根据上一小节的方法, 通过临界割集支路两端母线的电压幅度曲线离线计算第 k 条临界割集支路的参数 β_k 。参数 β_k 对故障位置和故障持续时间也不敏感, 主要受临界割集支路位置和负荷分布的影响。因此, 参数 β_k 也满足离线设置和在线使用的要求。

3) 在线检测线路功率 P_k 、每条割集支路两端之间的角度差 σ_k 和 $dP_k/d\sigma_k$ 。 $d\sigma_k/d\delta$ 根据 β_k 和 σ_k 使用等式(2-51)在线计算; $dP_k/d\delta$ 可从式(2-58)中在线计算获得。

故障后, 当各条割集支路两端之间的电压相角差达到局部极值时, 功角会回摆。

当 $d\sigma/dt$ 接近 0 时, $dP_k/d\sigma$ 的计算变得困难。然而, 在这种情况下不会发生暂态失稳。因此, 无需计算 $dP_k/d\sigma$ 。将条件(2-59)添加到失稳检测条件(2-48)中, 以防止功角摆动到最大位置, 然后再摆动回来时出现错误估计。

$$\begin{cases} |\sigma_k(t) - \min(\sigma_k)| > \sigma_{\min} & \text{当 } \min(\sigma_k) > -180^\circ \\ |\sigma_k(t) - \max(\sigma_k)| > \sigma_{\min} & \text{当 } \max(\sigma_k) < 180^\circ \end{cases} \quad (2-59)$$

式中 $\min(\sigma_k)$ 、 $\max(\sigma_k)$ —— σ_k 的局部最小值和最大值;

$\sigma_{\min}$ ——较小的角度阈值, 取 0.5° 。

4) 如果临界割集支路满足不稳定判据(2-48), 或者临界割集支路两端之间的角度差 $\sigma_k > 180^\circ$, 则判定为不稳定。 180° 的角度用于防止在极端情况下, 如测量误差或严重故障, 判据失效。

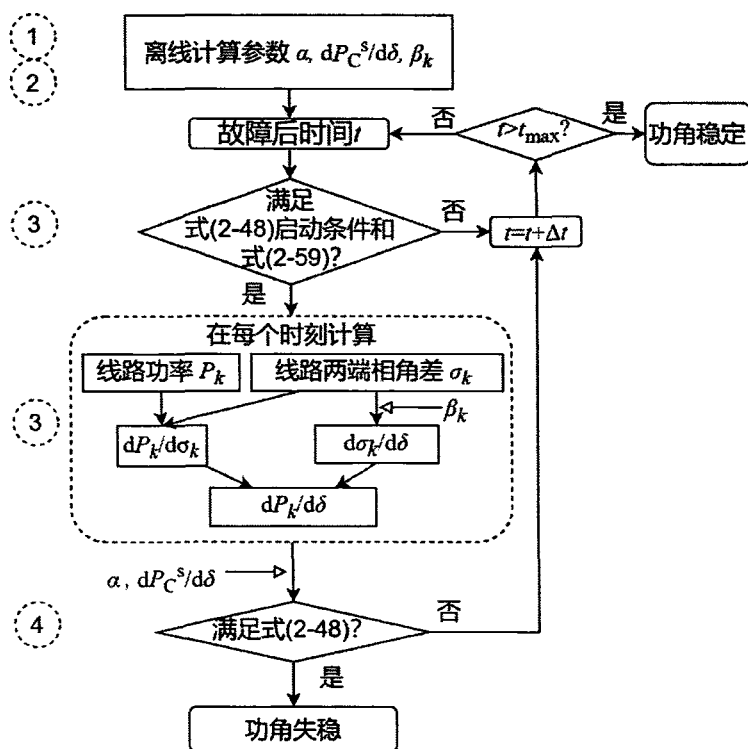


图 2-7 计算流程图

Fig.2-7 Calculation flow chart

2.4.3 所提方法的适用性讨论

2.4.3.1 运行方式和故障位置变化导致的临界割集变化

当运行方式调整导致发电机出力变化时, 临界割集的位置可能发生变化; 故障发生的位置不同, 临界割集的位置也可能不同。通过离线分析, 可以同时检测这些临界割集, 当发生故障时, 非临界割集的失稳检测不会被激活。本章第 2.5 节算例分析中的 IEEE39 系统和 IEEE118 系统对这两种情况分别进行了验证。

2.4.3.2 临界割集的在线识别方法

针对临界割集漂移的情况,可以通过额外的步骤来在线确定系统越过稳定边界时的临界割集,然后在临界割集上运用所提出的失稳检测方法。临界割集的定位方法已经有大量的研究,绝大多数方法不能预判^[142,143],或预判方法计算复杂^[144,145]。本文提出一种简单有效的方法识别临界割集漂移,且可以提前判断临界割集的位置。

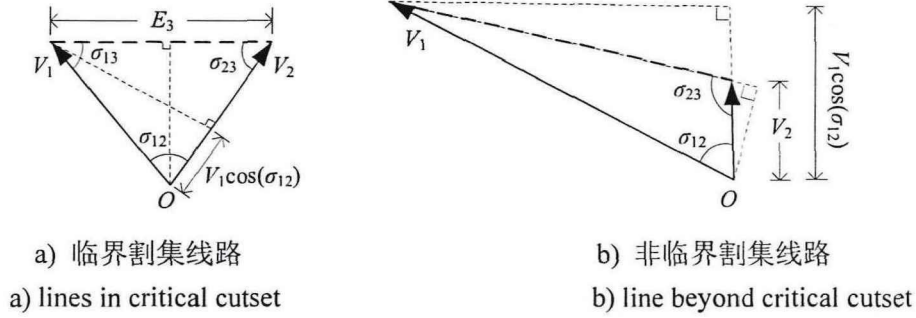


图 2-8 线路两端电压相量图

Fig.2-8 voltage phasor at two ends of the line

线路两端电压相量如图 2-8 所示。根据余弦定理,电压幅值和角度满足关系 $E_3^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos(\sigma_{12})$ 和 $V_1^2 = E_3^2 + V_2^2 - 2E_3V_2\cos(\sigma_{23})$, 得到:

$$\cos(\sigma_{23}) = \frac{V_2 - V_1\cos(\sigma_{12})}{E_3} \quad (2-60)$$

同理可得:

$$\cos(\sigma_{13}) = \frac{V_1 - V_2\cos(\sigma_{12})}{E_3} \quad (2-61)$$

当该线路在当前时刻属于临界割集时,满足 $\cos(\sigma_{23}) > 0$ 且 $\cos(\sigma_{13}) > 0$, 根据式 (2-60) 与式 (2-61), 该条件等价于:

$$V_2 - V_1\cos(\sigma_{12}) > 0 \text{ 且 } V_1 - V_2\cos(\sigma_{12}) > 0 \quad (2-62)$$

具体地分析,当 $V_2 - V_1\cos(\sigma_{12}) < 0$ 时,临界割集在 V_2 母线外侧,如图 2-8 b) 所示;同理,当 $V_1 - V_2\cos(\sigma_{12}) < 0$ 时,临界割集在 V_1 母线外侧。

基于该判据识别临界割集的计算流程如下:

(1) 形成网络简化图。以图 2-9 为例,保留潜在临界割集附近的线路拓扑连接,将 S 网络其他节点和 A 网络其他节点分别合并为图中节点 4 和节点 5。潜在临界割集通过离线计算得到,通常包含区域电网之间的联络线、输送功率大的线路。当计算资源足够时,该步骤可以省略。

(2) 将网络中满足条件 (2-62) 的线路从网络简化图中移去,如果这些线路包含割集,则该网络被分割为两个或多个互不连通的子网络。网络连通性的判断与子网络的划分结果可以通过计算拉普拉斯矩阵的零特征值数量与其特征向量得到。图的

拉普拉斯矩阵的零特征值的个数等其连通网络的个数，零特征值的特征向量表示了其子网络的划分。这是因为连通图的拉普拉斯矩阵的每行每列之和都等于 0，包括每个连通子图。以图 2-9 为例，假设检测到线路 1-4 和 3-4 满足条件(2-62)，将其从网络中移出，计算剩下网络的拉普拉斯矩阵特征值和特征向量。此时有两个零特征值，其特征向量分别为 $[1,1,1,0,1]^T$ 和 $[0,0,0,1,0]^T$ ，因此网络被划分为两个子网络，分别为节点 4 构成的网络 and 剩余节点构成的网络，临界割集为 C_1 。当临界割集漂移，满足条件(2-62)的线路转变为线路 1-3、1-5、2-5、3-4，以上方法同样可以计算出临界割集 C_2 。该方法在第 2.5 节 IEEE118 系统中得到了验证。

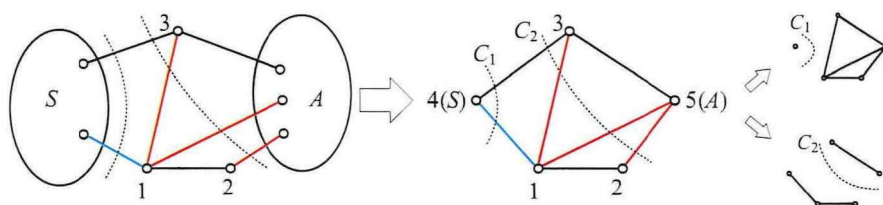


图 2-9 网络拓扑到简化图

Fig. 2-9 simplified graph derived from network topology

2.4.3.3 非临界割集的适用性分析

如果临界割集在小范围内漂移，所提方法仍然适用与临界割集附近的非临界割集线路，本小节对这种情景下的适用性进行分析。因为识别临界割集的作用是用来估计 $d\sigma/d\delta$ ，从而计算式(2-58)，并非所提失稳判据中的必要条件。非临界割集线路两端的电压向量如图 2-10 所示。

由于此时 $\sigma = \theta_1 - \theta_2$ ，得到以下关系：

$$\tan \sigma = \frac{(\beta_1 - \beta_2) \tan(\delta/2)}{1 + \beta_1 \beta_2 (\tan(\delta/2))^2} \quad (2-63)$$

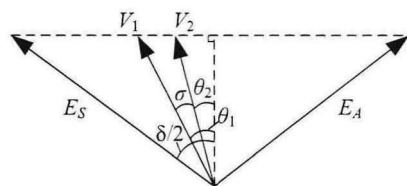


图 2-10 非临界割集线路两端电压的相量图

Fig.2-10 Phasor diagram of voltage at both ends of non-critical cut-set line

然后根据方程的三角函数关系式(2-63)和(2-56)，求解 $\tan(\delta/2)$ ，记作函数关系 $\tan(\delta/2) = g_2(\cos \sigma)$ 。再对等式(2-63)两边分别对 δ 求导。最后代入 $\tan(\delta/2) = g_2(\cos \sigma)$ 消除 δ ，得到 $d\sigma/d\delta$ 表达式。该推导过程与式(2-57)一致，只需将其中的 β_2 换成 $-\beta_2$ 。所以可以仍然使用式(2-51)估计 $d\sigma/d\delta$ ，其中 $\beta = (\beta_2 - \beta_1)/2$ 。在临界割集附近的线路，由于 β_2 接近于 0， $\beta_1 - \beta_2 \approx \beta_1 + \beta_2$ 。如果不分辨其线路是否属于临界割集，仍然可以采用 $(\beta_2 + \beta_1)/2$ 计算 β ，只是会高估其中的 β 参数。

式(2-51)的曲线如图 2-11 a)中所示,当 σ 较小时, $d\sigma/d\delta$ 对 β 参数不敏感;当 σ 较大时,高估 β 参数导致 $d\sigma/d\delta$ 数值偏小,使得根据式(2-58)计算的补偿量绝对值偏小,失稳判据会产生稍微多一点的延时,但不会出现误判。另外需要注意的是,非临界割集的 σ 不会取到较大的角度,从图 2-10 中就可以直观的看出 σ 不可能大于 90 度,其取值范围由联立式(2-63)和(2-56)后, $\beta_2 < 0$ 时 $\tan(\delta/2)$ 存在实数解的条件得到。

图 2-11 b)中对比了式(2-51)的曲线,其中 β 分别等于 0.15 和 0.2,与式(2-57)的曲线,其中 (β_1, β_2) 分别等于(0.25, -0.05)、(0.25, 0.05)、(0.3, -0.1)和(0.3, -0.1)。图中黄色线和紫色线突然下降是因为 $\beta_2 < 0$ 时 σ 取到了它的极限值。此时 δ 接近 180 度,分别为 171.5°和 170.1°,所提方法在该角度之前就已经能够检测到系统功角失稳,所以该突变量不构成影响。结果表明,如果不分辨线路是否属于临界割集,利用式(2-51),其中 $\beta = (\beta_1 + \beta_2)/2$, 仍然很好的近似式(2-57),在 IEEE118 系统中得到了验证。

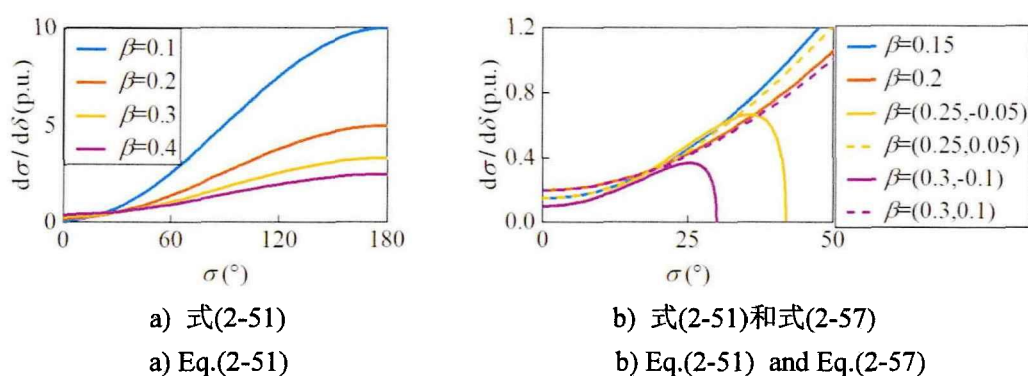


图 2-11 不同 β 参数下 $d\sigma/d\delta$ 曲线

Fig. 2-11 $d\sigma/d\delta$ curve under different β parameters

2.5 算例分析

2.5.1 负荷能量特性的验证

IEEE39 节点系统的单线图如附录 B 中图 B-1 所示。本小节测试了两种运行工况下的失稳模式:

- 1) 发电机 39 滞后于其他发电机;
- 2) 发电机 33、34、35 和 36 超前于其他发电机。

在失稳模式 1 中,由线 1-2 和 8-9 组成的集合 C_1 是将系统分为两个区域的临界割集,如图 2-12 所示。 C_2 (由线路 1-39 和线路 9-39 组成)和 C_3 (由线路 1-39、线路 17-18、线路 4-14、线路 5-6 和线路 6-7 组成)是另外两个割集。在失稳模式 2 中,集合 C_4 是由线路 16-17 和线路 15-16 组成的临界割集,如图 2-13 所示。由线路 21-22、23-24 和 16-19 组成的 C_5 是另一个割集。

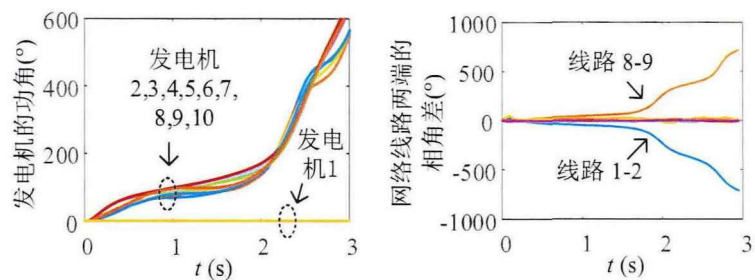


图 2-12 24 号母线故障时发电机功角和线路两端相角差($t_f=0.117$)

Fig.2-12 Generator's rotor angle and the angle differences across the lines with a fault at bus 24

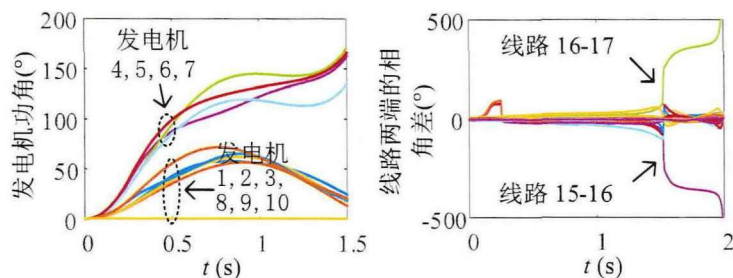


图 2-13 18 号母线故障时发电机功角和线路两端相角差

Fig.2-13 Generators' rotor angle and the angle differences across the lines with a fault at bus 18

以集合 C_1 为例, 通过仿真验证了负荷功率的式(2-26)和式(2-27)的推导结果, 如图 2-14 中虚线所示。曲线表明, 简化后的等效负荷功率近似于仿真曲线。

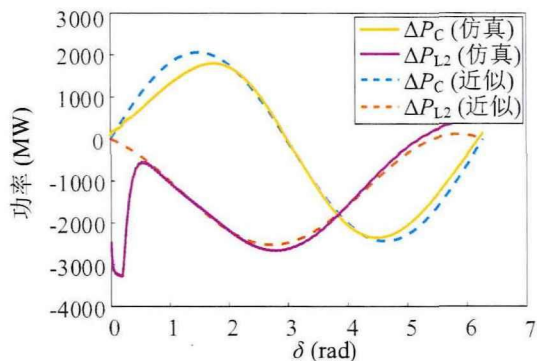


图 2-14 计算结果与仿真结果的比较

Fig. 2-14 Comparison of calculation results derived from the equations and the simulation

图 2-15 比较了割集 C_1 、 C_2 和 C_3 的 ΔP_C 和 ΔP_{L2} 曲线。在 $\delta=2.783$ rad 的位置, C_1 的 ΔP_{L2} 达到最小值 (即在余弦的 180° 处), 得到 γ_{L2} 的估计值为 0.3586 rad ($\approx 20.55^\circ$)。 C_1 的 ΔP_C 在 $\delta=4.478$ rad 处达到第一个最小值, 得到 γ_C 的估计值为 -1.3364 rad ($\approx -76.57^\circ$)。因此, C_1 的 ΔP_C 比 C_1 的 P_{L2} 落后 1.695 rad ($\approx 97.11^\circ$), $P_{L2\max} = 12.6757 > 0$, 综上, 满足命题 2.1 的条件。 C_2 和 C_3 的曲线 ΔP_C 和 ΔP_{L2} 提供了类似的结果。

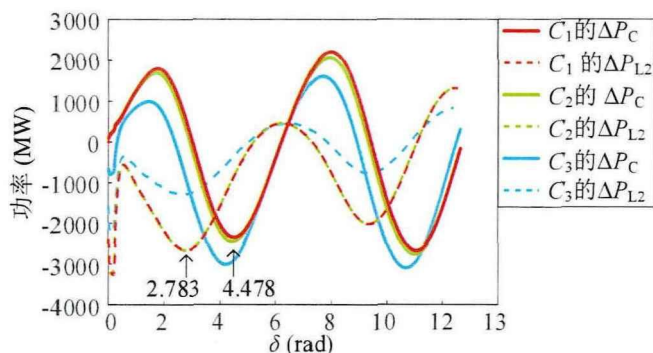


图 2-15 失步条件下负荷功率和割集功率之间的关系（母线 24 上的故障）

Fig.2-15 Relationship between the load power and the cutset power in the out-of-step condition (with failure on bus 24)

根据命题 2.1, $\Delta P_C=0$ 可用于检测同步发电机失步。图 2-16 a)中, D 点(D_1 , D_2 , 和 D_3)对应于等式(2-12)中定义的点, B 点对应于最大势能, 即等式(2-8)定义的点。由于网络线损的影响, B 点和 D 点不会同时出现。 F 点(F_1 , F_2 和 F_3)对应于等式(2-18)定义的点。因此, D 点(D_1 , D_2 , 和 D_3)和 B 点可以近似地视为稳定边界, F 点(F_1 , F_2 和 F_3)用于检测系统是否失稳。失稳模式 2 的曲线与失稳模式 1 的曲线相似。

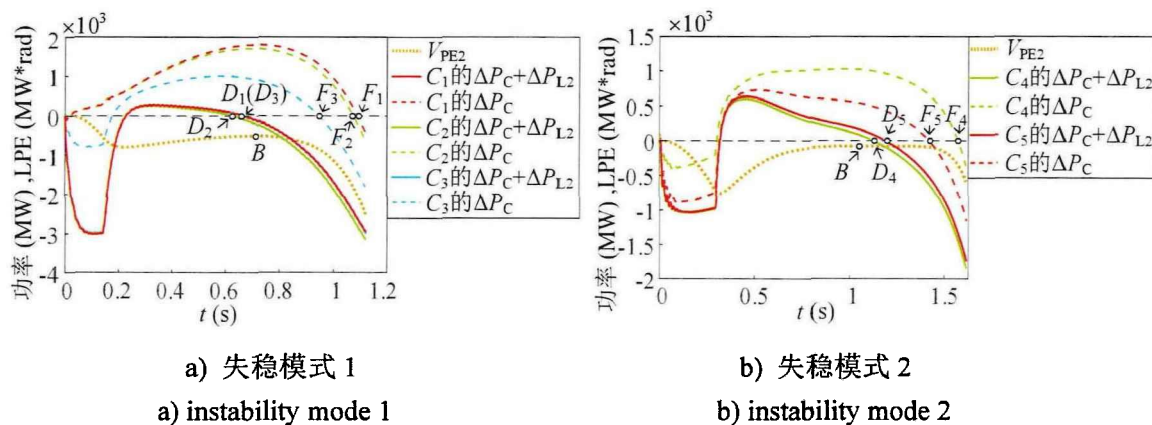
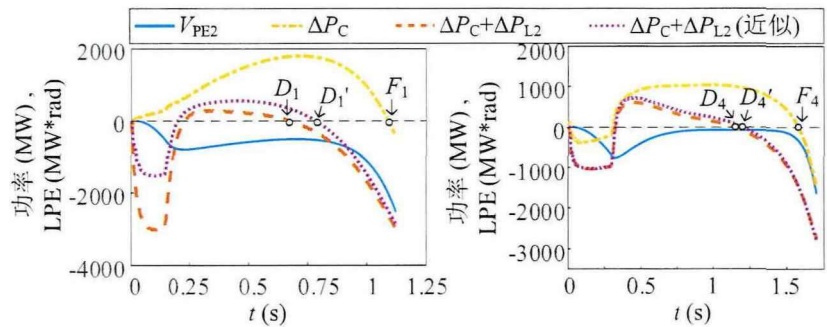


图 2-16 负荷功率对 LPE 判据的影响

Fig.2-16 Influence of the load power on the LPE criterion

F 点 (F_1 , F_2 和 F_3) 晚于 D 点 (D_1 , D_2 和 D_3) 检测到失稳。如第 2.4 节所述, 监控部分负荷功率可以减少这种延迟。对于割集 C_1 , 通过检测网络 S 中母线 3、母线 4、母线 7 和母线 8 的负荷功率, 估计负荷能量对发电机失稳的影响。首先计算式(2-40)中的参数 $P_{LSc,N}$, $P_{Smax,N}$, 和 $\gamma_{LS,N}$ 。由于 $\gamma_{LS,N}$ ($=0.3408$ rad) 接近 γ_{L2} ($=0.3586$ rad), 因此满足等式(2-41)的条件。然后使用式(2-41)计算参数 α : $\alpha_1=2.1798$, $\alpha_2=2.2611$, 和 $\alpha=2.1798$ 。最后使用式(2-42)估算 ΔP_{L2} 。对于割集 C_4 , 母线 21 用作负荷功率监控。同样, 获得了以下参数: $\gamma_{LS,N}=0.2729$ rad ($\approx \gamma_{L2}=0.2764$ rad), $\alpha_1=5.8557$, $\alpha_2=5.8655$ 和 $\alpha=5.8655$ 。图 2-17 中的紫色虚线表明所提出的方法加快了失稳检测, 预测失稳的时间提前了 300 毫秒 (D_1' 点比 F_1 点) 与 380 毫秒 (D_4' 点比 F_4 点)。



a) 割集 C_1 使用母线 3、4、7、8 的负荷功率 b) 割集 C_4 使用母线 21 的负荷功率
a) cutset C_1 using the load power of bus 3, 4, 7, 8 b) cutset C_4 using the load power of bus 21

图 2-17 使用部分负荷测量值估算 ΔP_{L2} 分量

Fig. 2-17 Estimation of the ΔP_{L2} component using partial load measurements

2.5.2 不同割集的支路势能判据验证

选择三个不同的割集 C_1 、 C_2 和 C_3 ，以比较不同割集对 LPE 判据的影响。 C_1 割集的 LPE 占网络中串联元件 LPE 之和的绝大部分，这也是临界割集的特点，如图 2-18 所示。相比之下，其他两个割集的 LPE 非常小。按照原 LPE 判据，割集 C_2 和 C_3 不是临界割集，其 LPE 都不能判断系统的暂态功角失稳。

然而，图 2-15 说明三个割集都满足定理 4.1 的条件。因此，三个割集的 LPE 判据都是有效的。从图 2-16 还可以验证，三个割集 LPE 分别在 F_1 、 F_2 和 F_3 点检测到功角失稳。

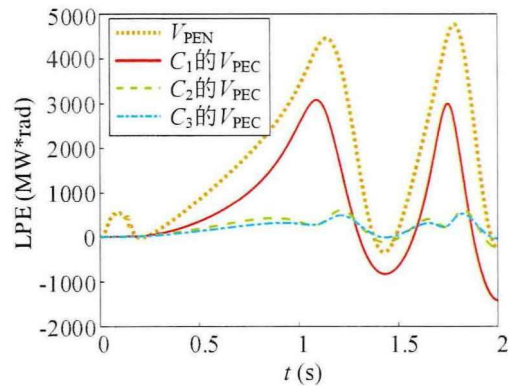


图 2-18 不同割集 C_1 、 C_2 和 C_3 的 LPE。 V_{PEN} 表示所有元件的 LPE 之和， V_{PEC} 表示割集的 LPE
Fig.2-18 LPE of different cutsets C_1 , C_2 , and C_3 . V_{PEN} denotes the sum of the LPE of all the series elements, and V_{PEC} denotes the LPE of the cutset

提高判据性能的另一种方法是通过割集选择。在图 2-16 a) 中，割集 C_3 比 C_1 和 C_2 早 140 毫秒检测到系统失稳，但割集 C_3 包含 6 条线，这很不方便。然而，在其他情况下，割集的合理选择提供了良好的结果。例如，选择割集 C_5 而不是割集 C_4 ，如果仅使用割集支路的功率，则 C_5 比 C_4 早 150 毫秒检测到失稳，如图 2-16 b) 所

示。这一发现验证了之前的结果，即选择一个更靠近低惯量发电机组的割集，可以更早地检测到发电机的失稳。

2.5.3 失稳检测方法的验证

2.5.3.1 IEEE39 算例分析——验证正确性与快速性

IEEE 39 母线系统的单线连接图如图 B-1 所示。在不同的稳态初始条件下，将两种失稳模式的系统分别从割集 C_1 和割集 C_4 中分离出来。两种失稳模式下的失稳轨迹分别如图 2-12 和图 2-13 所示。

(a) 失稳模式 1: 在该模式的初始条件下，如附录 B 中表 B-1 所示，系统倾向于从图 B-1 中的割集 C_1 (线路 8-9 和线路 1-2) 分为两个同调网络。离线参数 $\alpha(\beta_{1-2}, \beta_{8-9})$ 和 $dP_C/d\delta$ 的计算方法如 2.4.2 节所述。在该割集中，这三个参数分别为 0.586, (0.451, 0.3875), 和 2236。

(b) 失稳模式 2: 在该模式的初始条件下，如附录 B 中表 B-2 所示，系统被图 B-1 中的割集 C_4 (线路 16-17 和线路 15-16) 分离为两个同调网络。因为滞后机群 (发电机 1、2、3、8、9、10) 不是完全同调的。当功角改变时，临界割集支路两端之间的角度差迅速改变。在这个割集中，参数 $\alpha, (\beta_{15-16}, \beta_{16-17})$ 和 $dP_C/d\delta$ 分别为 0.2891, (0.083, 0.12), 和 2235。

(1) $dP_C/d\delta$ 估计方法的验证

图 2-19 是两条临界割集支路 (线路 1-2 和线路 8-9) 两端的电压幅度曲线。在功角摆动期间，母线 1 的电压幅值在最低点达到 0.432 (标么值)，在功角摆动期间，母线 2 的电压幅值在最低点达到 0.470 (标么值)。因此，母线 1 的 β_1 和母线 2 的 β_2 分别为 0.432 和 0.470，使用(2-52)计算 $\beta_{1-2}=0.451$ 。8-9 号线两端母线 8 和母线 9 的 β 值也采用相同的方法由式(2-52)得到： $\beta_1=0.293, \beta_2=0.482$ 和 $\beta_{8-9}=0.3875$ 。

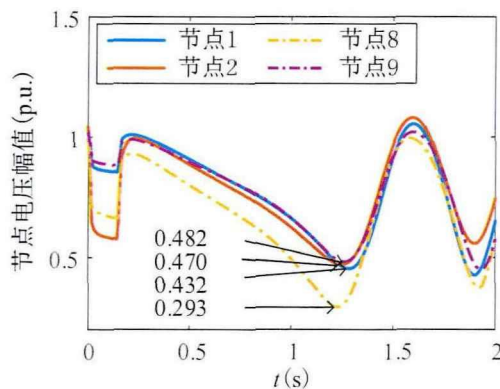


图 2-19 临界割集支路两端的电压幅值曲线

Fig. 2-19 Voltage amplitude curve at the two ends of the critical cutset lines

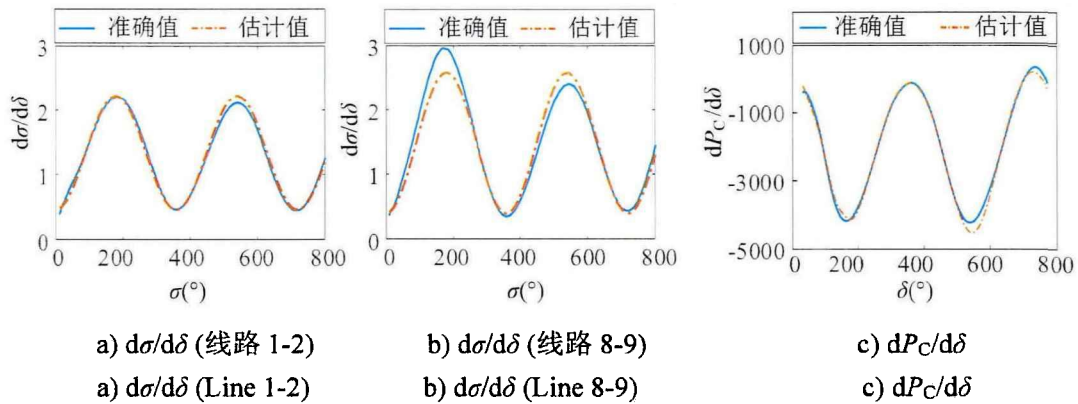


图 2-20 估计值与仿真值的比较

Fig. 2-20 Comparison of the estimated values and the actual value

图 2-20 a) 和 b) 表示了两条临界割集支路（线路 1-2 和线路 8-9）的 $d\sigma/d\delta$ 曲线。在仿真结果中，利用发电机功角曲线得到了精确的曲线。图 2-20 中的估计值曲线分别来自式(2-51)和式(2-58)。计算结果表明，该方法可以通过局部测量来估计 $d\sigma/d\delta$ ，从而准确地估计 $dP_C/d\delta$ 。

(2) 稳定工况下启动判据的验证

在故障临界切除时间附近验证了该方法检测功角稳定性的准确性。当故障持续时间为 0.117 秒（表示为 $t_f=0.117$ ）时，模式 1 下的系统不稳定，如图 2-12 所示。当 $t_f=0.116$ 时，系统稳定，因此临界清除时间在 0.116 秒和 0.117 秒之间。此外，模式 2 中的临界清除时间在 0.247 秒和 0.248 秒之间。

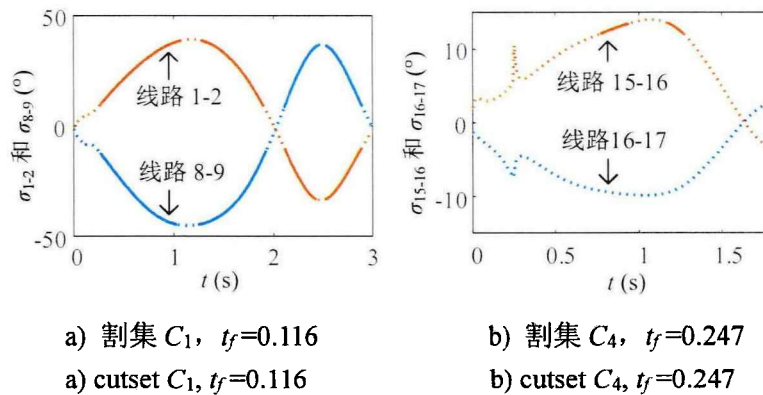


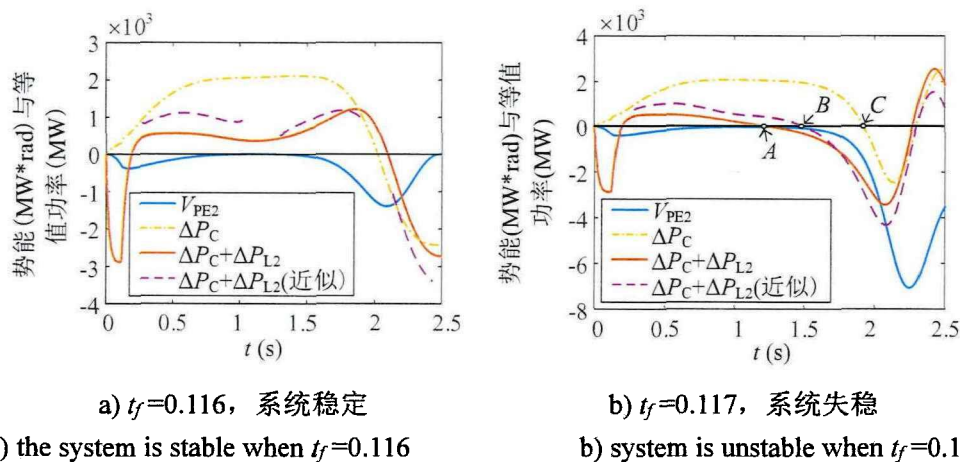
图 2-21 临界割集中各线路两端的角差

Fig. 2-21 Angle difference across the critical cutset lines

在模式 1 的稳定情况下，由于条件(2-59)中的阈值 $\omega_{\min}$ ，不稳定判据中 $\Delta P_C + \Delta P_{L2}$ 的计算不连续。当发现临界割集支路两端之间的角差达到局部极值时，失稳检测方法不会启动，直到角差偏离极值 0.5° ，因为此时系统的功角会往回摆动。由于上述原因，图 2-21 a) 中的实线分为四个部分，图中曲线的虚线部分表示不满足失稳判据的起始条件，实线表示失稳判据已激活。在图 2-22a) 中， $\Delta P_C + \Delta P_{L2}$ （估计值）被

分为三部分，对应于图 2-21 a) 中的前三条实线。 $\Delta P_C + \Delta P_{L2}$ (估计值) 和 0 之间没有交叉点；因此，不满足失稳判据(2-48)，系统被正确判定为稳定。

在模式 2 的稳定情况下，由于条件(2-48)中的阈值 $\sigma_{\min}$ ，两条割集支路不能同时满足启动条件，如图 2-21(b) 所示。当临界割集支路两端之间的角度差很小（与稳态值相比偏差小于 10° ）时，失稳检测方法不会启动，因为此时系统可能会保持同步。由于临界割集支路两端之间的角度差非常小，不激活失稳判据。因此，系统的功角也被正确检测为稳定。



a) the system is stable when $t_f=0.116$

b) system is unstable when $t_f=0.117$

图 2-22 割集 C_1 处与失稳检测相关的势能和功率

Fig. 2-22 Potential energy and power related to instability detection at cutset C_1

(3) 验证失稳判据的正确性，并比较不稳定情况下的检测时间

在图 2-22 b) 中， $\Delta P_C + \Delta P_{L2}$ (估计值) 和 0 在 B 点相交。此时满足系统失稳判据(2-48)。因此，所提出的检测方法能够正确区分稳定和不稳定算例。图 2-22 b) 中的 A 点对应于图 2-3 中的 UAP，C 点对应于失稳判据(2-17)确定系统失稳的点。所提出的改进方法将确定系统失稳的时刻从图 2-22 b) 中的 C 点提前到 B 点，B 点略晚于 A 点（对应于图 2-3 中的 UAP）。

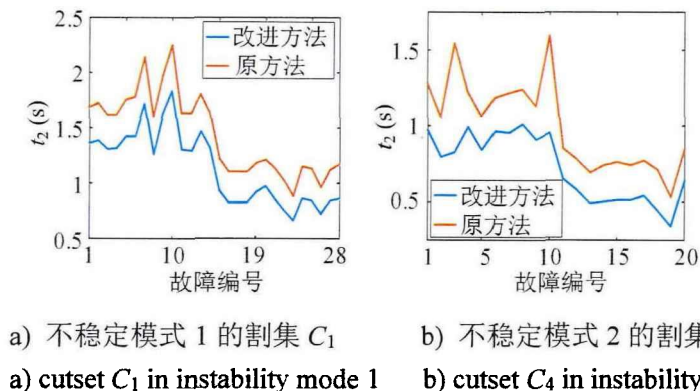


图 2-23 原方法和改进方法的检测时间

Fig. 2-23 Comparison of the detection time between the original method and the improved method

此外,还测试了更多的故障位置,以进一步验证改进判据的快速性。在图 2-23a)中,改进的方法比原方法(式(2-17))至少提前 240 毫秒检测到系统失稳,故障号如附录 B 表 B-3 所示。在图 2-23b)中,改进的方法至少提前 200 毫秒检测到系统失稳,故障号如附录 B 表 B-4 所示。改进的方法至少提前 200 毫秒检测系统失稳。

图 2-24 和图 2-25 表明,改进的方法可以使用较小的功角差和线路两端之间的角度差来检测系统的暂态功角失稳,图中 t_2 表示从故障切除到判断失稳的时间。实际上,失稳判据相当于使用角度差作为失稳阈值^[42]。在模式 1 中,如图 2-25 a)所示,改进判据的发电机功角失稳阈值和线路电压相位角差阈值分别约为 120 度和 70 度,而原始方法在角度超过 165 度之前无法检测到失稳。在模式 2 中,不稳定检测的角度阈值随故障位置而变化,但在每个故障中,改进判据中的失稳阈值小于原始方法的失稳阈值,如图 2-25(b)所示。因此,这种改进的方法可以更早地、准确地检测电力系统的暂态功角失稳。

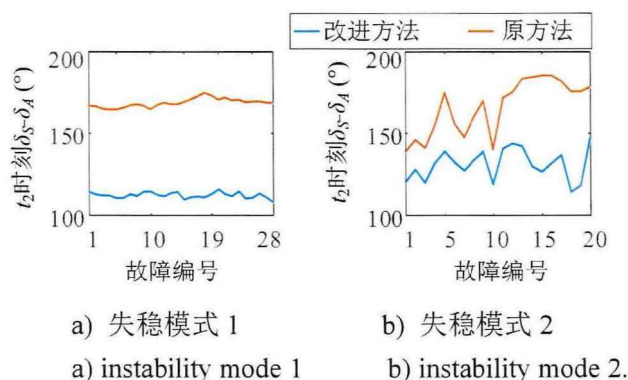


图 2-24 不稳定检测时两个发电机群之间的角度差

Fig. 2-24 Angle difference between the two generator clusters at the time of instability detection

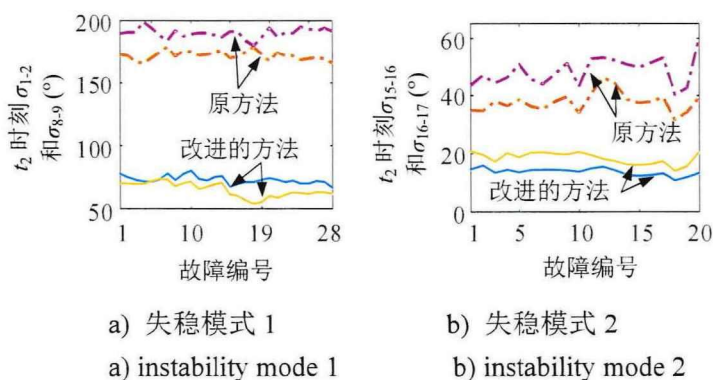


图 2-25 失稳检测时临界割集中各线路两端的角度差

Fig. 2-25 Angle differences across the critical cutset lines at the time of instability detection

2.5.3.2 IEEE118 算例分析——验证快速性与适用性

提出的暂态功角失稳判据在 IEEE 118 测试系统中得到了进一步验证。IEEE118 系统单线图见附录 B 中图 B-3, 该系统由 3 个区域组成, 由两个临界割集(C_1 和 C_2)

分隔。割集 C_1 (由线路 33-37、19-34、30-38、24-70 和 24-72 组成) 和割集 C_2 (由线路 83-85、84-85、92-93、92-94、92-100 和 92-102 组成) 存在于同一场景中。在这种情况下, 与割集 C_1 相关的 $\alpha, (\beta_{33-37}, \beta_{19-34}, \beta_{30-38}, \beta_{24-72}, \beta_{24-70})$ 和 $dP_C^s/d\delta$ 相关的参数分别为 0.3606, (0.2115, 0.1231, 0.2400, 0.4293, 0.2040) 和 -782.85。与割集 C_2 相关的 $\alpha, (\beta_{83-85}, \beta_{84-85}, \beta_{92-93}, \beta_{92-94}, \beta_{92-100}, \beta_{92-102})$ 和 $dP_C^s/d\delta$ 的参数分别为 0.1747, (0.2323, 0.1031, 0.1836, 0.2972, 0.4236, 0.1227) 和 -874.01。

如果故障发生在区域 1 内或周围, 例如母线 5, 则区域 1 中的发电机 10、12、25、26 和 31 更容易失去稳定性, 如图 2-26 所示。在这种故障下, 与割集 C_2 相关的改进不稳定判据的启动条件不满足, 因此只有割集 C_1 的不稳定判据将被激活。类似地, 如果故障发生在区域 2 内或周围, 例如母线 88, 区域 2 中的发电机 87 和 89 可能会失步, 如图 2-27 所示。

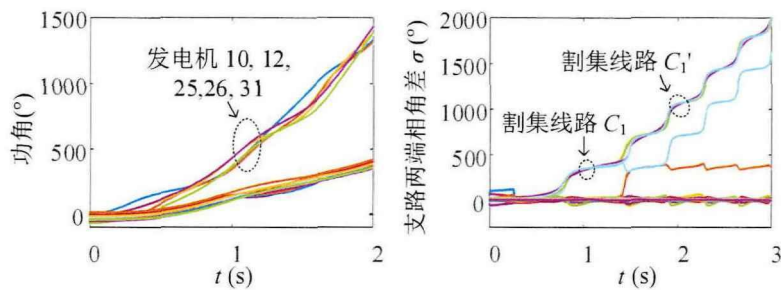


图 2-26 母线 5 故障时的仿真曲线

Fig. 2-26 The simulation results with the fault at Bus 5

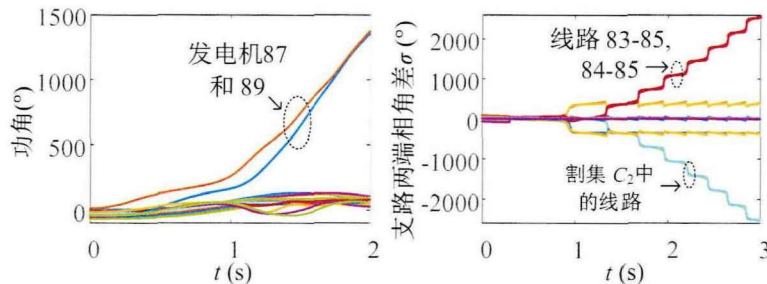


图 2-27 母线 88 故障时的仿真曲线

Fig. 2-27 The simulation results with the fault at Bus 88

与图 2-22 类似, 图 2-28 也说明了改进方法可以正确估计 ΔP_{L2} (见 $\Delta P_C + \Delta P_{L2}$ 和 $\Delta P_C + \Delta P_{L2}$ (近似) 曲线)。图中 A 点对应 UAP, B 点和 C 点分别对应于改进方法和原方法 (式(2-17)) 的失稳检测。B 点接近 UAP, 早于原始方法确定的 C 点。在本算例中, 在薄弱母线上选择了更多的三相瞬时短路故障, 如附录 B 表 B-6 所示, 其他母线 (与发电机相连的母线除外) 上的故障很难导致暂态功角失稳。图 2-29 所示的结果表明, 改进的方法比原始方法检测暂态失稳的时间至少提前 140 毫秒, 图中 t_2 代表不稳定检测的时间。

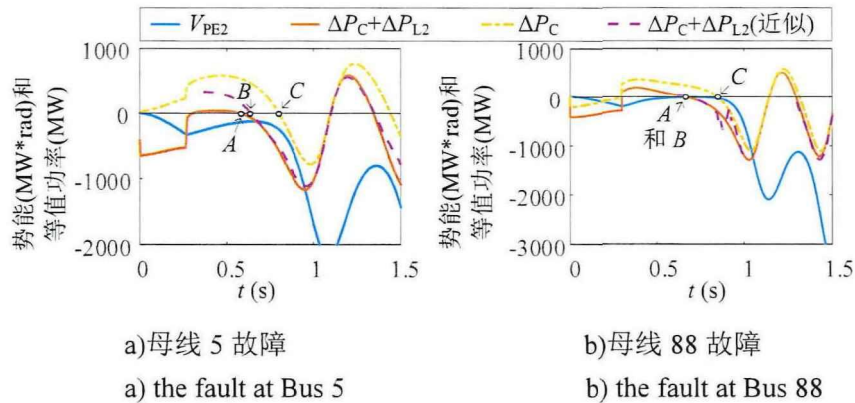


图 2-28 与失稳检测相关的势能和功率

Fig.2-28 Potential energy and power related to instability detection

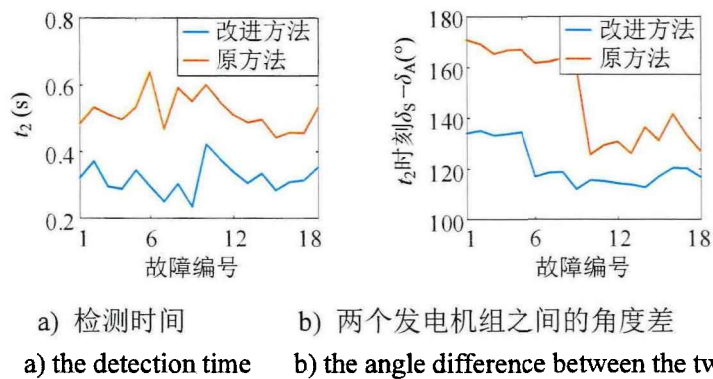


图 2-29 原始方法与改进方法之间的比较

Fig. 2-29 Comparison between the original method and the improved method

另外值得注意的是，图 2-26 和图 2-27 中的临界割集都发生了漂移。5 号母线发生故障后，基于(2-62)判据得到 0.57~0.96 秒之间临界割集为 C_1 ，1.10~1.55 秒和 1.75~1.76 秒临界割集从 C_1 转移为 C_1' ，然后 1.80~1.99 秒再转移回 C_1 。88 号母线发生故障后，在 1.21 秒之前，临界割集在小范围内反复漂移。0.35~0.85 秒之间，临界割集为 C_2' 。1.21 秒之后，临界割集为 C_2 。图 2-28 通过割集 C_2 在 0.68 秒时就检测到系统失稳，此时临界割集却是 C_2' ，验证了前面的非临界割集适用性分析。而且，使用割集 C_1' 和 C_2' 也能检测系统失稳，结果与图 2-28 非常相似。图 2-28 b) 中紫色虚线不连续是因为线路两端电压相角差回摆导致失稳判据暂时未激活。

2.5.3.3 基于实际电网的算例分析

在大区域互联电网上对所提出的失稳判据进行了验证，以说明所提判据的应用潜力。电网拓扑示意如图 2-30 所示，其中 FJ 电网和 ZJ 电网一共含有 3272 条母线，5359 条线路，329 台发电机。当 FJ 电网中的 500kV 母线发生三相接地短路时，FJ 电网与 ZJ 电网之间面临功角失稳的风险，临界割集为图中的割集 C，由 1000kV 线路 RC-LD 和 500kV 线路 ND-LX 组成。

在 PSD-BPA 软件上进行故障前后的电网仿真，仿真中的故障发生地点选取为与临界割集 C 电气距离较远的 500kV 母线，如图 2-30 b)所示。在图中母线编号 1 到 6 分别设置 0.1 秒时发生瞬时三相短路故障，FJ 电网与 ZJ 电网之间发生机群失稳模式，如图 2-31 a)所示。而 FJ 电网中其他 500kV 母线的短路故障大多导致短路地点附近的发电机局部失稳，这种情况的识别相对简单，所以在这里主要讨论更复杂一点的机群失稳模式。而且，在 ZJ 电网中割集 C 附近有三条直流，BJ 直流、NS 直流和 BHT-ZJ 直流，均含有换相失败预测环节。其中 BJ 直流距离割集电气距离最近，受功角失稳的影响较大，在系统功角失稳之后发生换相失败，如图 2-31 b)所示。通过仿真计算表明，所提出的功角失稳检测方法仍然适用于这种交直流电网的应用场景。

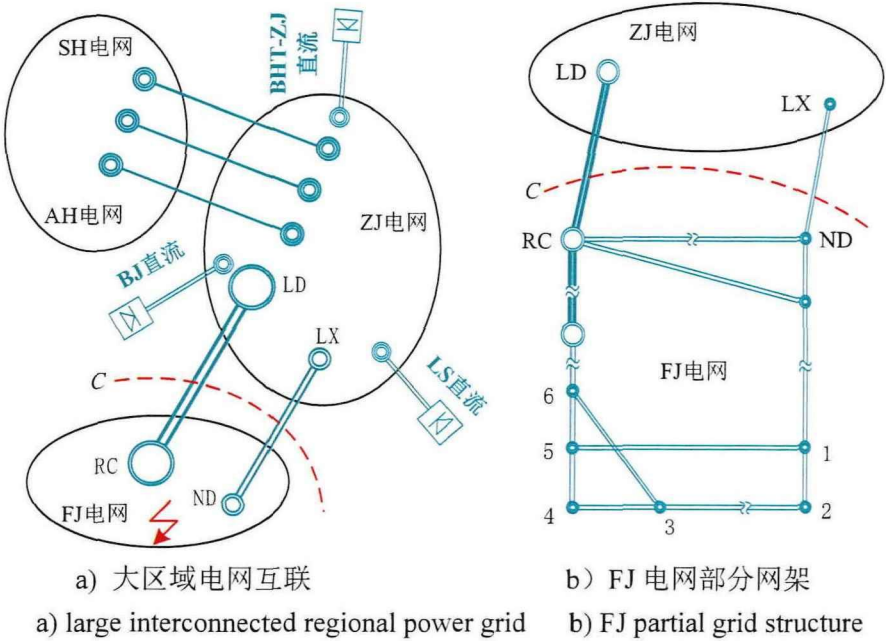


图 2-30 网络拓扑示意图

Fig.2-30 Network topology diagram

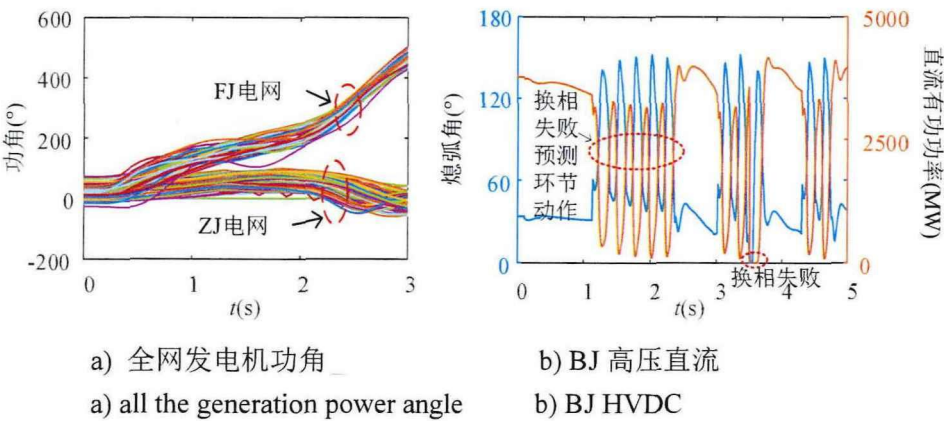
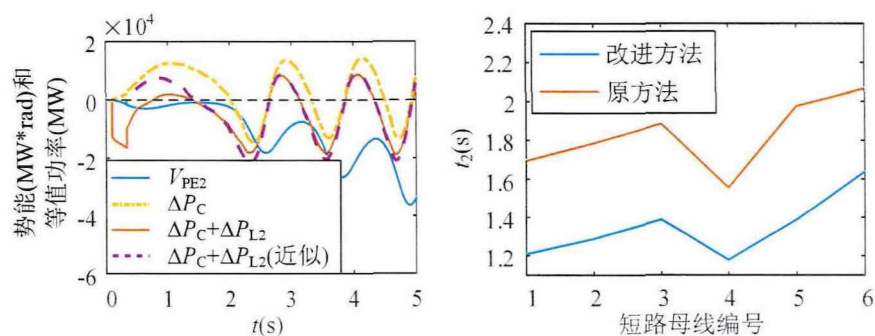


图 2-31 故障母线 1 的仿真结果

Fig.2-31 simulation results with fault on bus 1

按照图 2-7 中所提出方法的计算流程, 基于电网稳态数据离线计算得到割集 C 的参数 α 、 $(\beta_{RC-LD}, \beta_{ND-LX})$ 和 $dP_C/d\delta$ 分别等于 0.3990、(0.3066, 0.5700) 和 -158.76。在割集参数的计算过程中, 将直流逆变器简单处理为恒阻抗模型, 失稳判据的计算精度仍然满足要求。判据式(2-47)的估计值与基于仿真数据的计算值分别如图 2-32 a) 中紫色虚线和红色实线所示, 两者吻合较好, 表明所提出的基于局部量测的失稳判据能够快速准确的判断系统失稳。图中其他曲线表示的含义在前面的两个算例中已经被详细解释, 例如在图 2-22 和图 2-28 中。

图 2-32 b) 对比了失稳判断的时间, 提出的改进方法比原方法提前 380 毫秒到 590 毫秒检测出系统功角失稳, 能够为紧急控制争取宝贵的时间。从系统功角摆开的角度对比, 改进方法在两机群惯量中心功角差增大到 130 度到 140 度之间即可判断, 此时临界割集两端电压相角差约为 70 度 (线路 RC-LD) 和 100 度 (线路 ND-LX)。而原方法需要功角差增大到接近 180 度才能判断, 此时临界割集两端电压相角差约为 180 度。



a) 母线 1 短路故障时的等值功率
b) 判据时间对比
a) equivalent power in case of the fault on bus 1 b) time of the detection

图 2-32 失稳判据的验证结果

Fig.2-32 The validation results of the instability detection

2.6 本章小结

本章研究了基于支路势能的发电机功角失稳判据, 根据电力网络的暂态能量分布的特点, 分析了该类判据的理论基础, 提出了传统支路势能判据的多种改进方法。本章所得结论如下:

(1) 现有 LPE 判据的理论基础是通过临界割集势能近似整个系统的势能, 造成了其理论基础上的局限性。阻抗型负荷对判据的影响不清晰、临界割集的条件太苛刻。本章基于机群的相对动能和相对势能, 对 LPE 判据的理论基础进行了新的解释, 扩大了该判据的应用范围。

(2) 理论分析表明, 阻抗型负荷不影响现有 LPE 判据的可靠性, 但增加了 LPE 判据的延时。割集的位置不影响 LPE 判据的条件, 但影响 LPE 判据的检测时间。

更加灵活的选择割集可以拓展失稳判据的适用条件。本章在负荷功率补偿和割集位置选择的基础上，提出了三种简单的改进策略，分别基于负荷功率量测、割集选择和临界割集量测，实现了更早的预测系统的失稳。

(3) 提出了一种基于临界割集量测的功角失稳快速检测方法。与现有的 LPE 判据相比，该方法仅基于局部测量即能准确地、更早地检测发电机功角的暂态失稳，可以为后续的紧急控制赢得更多宝贵的时间。而且，改进后的方法易于在线实现，一方面，因为只需要临界割集支路的功率和临界割集支路两端的角度差；另一方面，该方法减少了对临界割集的在线选取的依赖，对临界割集附近的其他割集同样适用。此外，针对临界割集漂移的情况，也提出了在线预判临界割集的方法。

第3章 电压稳定临界点的混合计算方法

3.1 引言

在电压失稳检测方法中,基于临界点计算的方法可以准确地评估电压稳定裕度,比仅基于状态的电压稳定指标具有更高的精度和适用性。但这类方法的计算量较大,难以满足在线快速评估的要求,因此有必要研究电压稳定临界点的快速计算方法。

本章基于连续潮流法和分岔点直接法,研究了临界点类型的辨识问题和临界点的快速计算问题,提出了兼顾数值稳定性和快速性的混合计算方法。首先,根据电力系统电压稳定临界点的特征,提出了鞍结型分岔点逼近指标。然后,以该指标作为连接纽带,提出了结合连续潮流与直接法的混合计算方法。在该方法中,研究了步长较大时节点类型转化的识别问题。针对鞍结型分岔和极限诱导型分岔的失稳类型识别问题,以及直接法中的计算瓶颈的问题,提出了一种海森矩阵隐式计算方法,提高了计算效率。最后,将所提出混合算法从静态电压稳定临界点拓展到了奇异点的计算,也为第5章的耦合强度指标提供了高效的计算工具。

3.2 电压稳定临界点的特征

3.2.1 电压稳定临界点的类型

电压失稳问题通常认为由局部负荷驱动引起,表现为大面积电压持续下降,或者母线不能维持稳定电压。在参数空间中,静态电压失稳通常与鞍结型分岔以及极限诱导分岔有关。极限诱导分岔表现为系数矩阵的一个特征值非连续地从实轴的负半轴跳跃到正半轴,是鞍结型分岔的非平滑形式。暂态电压失稳中的奇异点也是鞍结型分岔的另外一种表现形式,此外,电压失稳还存在霍普夫分岔、奇异诱导分岔等,但这些分岔类型在电压失稳现象中很少见,不在本章的讨论范围内。所以本章将鞍结型分岔点、极限诱导分岔、奇异点都称为电压稳定临界点。

由于电力系统的多时间尺度特性,其模型可以建模为式(3-1)所示的微分代数方程的形式^[146,147]。已有研究建立了潮流方程与微分代数方程的关系,所以电压稳定临界点通常直接基于潮流方程计算。本节介绍微分代数方程与潮流方程的关系,以及鞍结型分岔点与奇异点的关系。

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) \\ \mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) \end{cases} \quad (3-1)$$

式中 $\mathbf{x}$ ——动态元件的状态变量,包括发电机的转速和功角、电动机的滑差等;

y ——代数变量，包括节点电压幅值、节点电压相角，以及其他的快变量；
 λ ——表示负荷增长的参数。

在任意运行点 (x_0, y_0, λ_0) 处，假设 $\det(g_y) \neq 0$ ，根据隐函数定理， $0=g(x_0, y_0, \lambda_0)$ 可以表示为 $y_0=\varphi_1(x_0)$ ，此时微分代数方程降阶为微分方程式，其状态矩阵 A_{sys} 为式(3-3)。

$$dx_0/dt = f(x_0, \varphi_1(x_0), \lambda_0) \quad (3-2)$$

$$A_{sys} = f_x - f_y (g_y)^{-1} g_x \quad (3-3)$$

在微分代数方程的平衡点 (x^*, y^*, λ^*) 处假设 $\det(f_x) \neq 0$ ，根据隐函数定理， $0=f(x^*, y^*, \lambda^*)$ 可以表示为 $x^*=\varphi_2(y^*)$ 。此时微分代数方程简化为潮流方程式(3-4)，其雅克比矩阵 F_y 为式(3-5)。条件 $\det(f_x) \neq 0$ 主要与动态设备自身控制的稳定性有关，与系统的电压失稳现象无关。

$$0 = F(y^*, \lambda^*) = g(\varphi_2(y^*), y^*, \lambda^*) \quad (3-4)$$

$$F_y = g_y - g_x (f_x)^{-1} f_y \quad (3-5)$$

其中， $g_y = \partial g / \partial y$ ； $g_x = \partial g / \partial x$ ； $f_x = \partial f / \partial x$ ； $f_y = \partial f / \partial y$ 。

定理 3.1^[148]：在平衡点 (x^*, y^*, λ^*) 处满足 $\det(g_y) \neq 0$ ，微分代数方程的线性化系数矩阵 J_{dyn} 与降阶微分方程的状态矩阵 A_{sys} 同奇异。矩阵 J_{dyn} 如式(3-6)所示。

$$J_{dyn} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \quad (3-6)$$

定理 3.2^[148,149]：在平衡点 (x^*, y^*, λ^*) 处满足 $\det(g_y) \neq 0$ 和 $\det(f_x) \neq 0$ ，潮流方程雅克比矩阵 F_y 、矩阵 J_{dyn} 与矩阵 A_{sys} 同奇异。

定理 3.1 说明微分代数方程的小扰动稳定性与降阶微分方程小扰动稳定性在一定条件下等价，定理 3.2 说明潮流方程雅克比矩阵的奇异性与小扰动电压稳定性分析的临界状态等价。根据这两个定理，建立了潮流方程计算电压稳定临界值的理论基础。

如果在点 (x_0, y_0, λ_0) 处不满足定理中的条件 $\det(g_y) \neq 0$ ，则微分代数方程在该点失去定义。如果该点同时也是微分代数方程的平衡点，那么被称为奇异诱导分岔，这种情况被认为在实际电力系统中没有物理意义^[149]。更一般的情形，集合 S 中的点被称为奇异点（在一些论文中被称为“死巷点” impasse point），与暂态电压失稳现象有关。在参数空间中，奇异点也可以看作是一种鞍结型分岔点；在状态空间中，奇异点附近的动力学特性非常复杂，将在第 4 章中进一步研究。

$$S = \{(x_0, y_0, \lambda_0) | g(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \cap \det(g_y) = 0\} \quad (3-7)$$

式(3-7)定义的奇异点是方程(3-8)中 $F_2(y, \lambda)$ 在 $(y, \lambda)=(y_0, 0)$ 处对于参数 λ 的鞍结型分岔点^[150]，也是方程(3-9)中 $F_3(y, \lambda)$ 在 $(y, \lambda)=(y_0, \lambda_0)$ 处对于参数 λ 的鞍结型分岔点。本章采用后一种形式计算奇异点，因为它只需要将状态变量当作已知量，计算代数

变量的临界点即可, 计算方法同静态电压稳定的鞍结型分岔点的计算方法。因此, 在本章后文中将潮流方程(3-4)和微分代数方程的代数部分(3-9)都记作 $F(y, \lambda)$, 通过说明状态变量 x 的方式加以区分。

$$F_2(y, \gamma) = g(x_0 + \gamma f(x_0, y_0, \lambda_0), y, \lambda_0) = 0 \quad (3-8)$$

$$F_3(y, \lambda) = g(x_0, y, \lambda) = 0 \quad (3-9)$$

3.2.2 电压稳定临界点的性质

鞍结型分岔点的基本性质为方程的系数矩阵有且只有一个特征值从实轴的负半轴到达零点, 并随着参数的继续增加, 它将穿过零点到实数正半轴。该性质可以等价表示为多种形式。对于方程式(3-10), 文献[151]证明在鞍结型分岔点处 $\tau_j/w(i)=0$, i 在 1 到 n 中任取, 与 j 无关。引理 3.1 将该结论推广到更一般的形式。本章 3.3.5 中也基于引理 3.1 提出了鞍结型分岔点直接法中计算海森矩阵的隐式方法。

$$\begin{pmatrix} F_y & F_\lambda \\ e_j^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ \tau_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

式中 n —— $F(y, \lambda)$ 中的方程数量, 等于代数变量 y 的个数, $y \in R^n$ 。

F_y 、 F_λ —— $F(y, \lambda)$ 对变量 y 的雅可比矩阵、 $F(y, \lambda)$ 对参数 λ 的偏导数

e_j^T ——除了第 j 个元素外其余元素全为 0 的行向量, τ_j 和 e_j 的下标 j 相对应;

w ——分岔图 (例如 PV 曲线) 中的切向量, $w(i)$ 表示向量 w 的第 i 个元素; 向量 y 中元素的排列顺序决定了 w 中元素的顺序, 假设相量 y 中电压幅值 V_i 排列在前, 其他代数变量排列在后;

τ_j ——测试函数^[152], 与 Abbott 给出的鞍结型分岔点测试函数相同^[153]。

引理 3.1^[154]: 如果矩阵 F_y , 向量 R 和 T 的元素都是连续函数或者常数, 那么存在唯一的向量 u , W 和实数 ζ 使得式(3-11)和式(3-12)成立, 且矩阵 F_y 的秩等于 $n-1$ 的充分必要条件是 $\zeta=0$ 。

$$\begin{pmatrix} F_y & -R \\ -T^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3-11)$$

$$(u^T \ \zeta) \begin{pmatrix} F_y & -R \\ -T^T & 0 \end{pmatrix} = (0_{1 \times n} \ -1) \quad (3-12)$$

在分岔图 (例如 PV 曲线) 中, 鞍结点附近的曲线近似为二次函数^[155]。文献 [155,156] 提出通过曲线拟合估计电压稳定临界点的位置, 但是这种方法并不能够提供准确的临界点位置估计, 尤其当计算点远离临界点的时候^[157]。还有的方法根据构造测试函数^[158,159]、系数矩阵求逆后的最大奇异值^[160]等在电压稳定临界点附近近似二次函数的性质, 构造二阶指标, 近似预测临界点的位置。二阶指标的形式如(3-13)所示, 但是也存在一些问题, 以两节点系统图 3-1 为例进行说明。

$$\tilde{\tau}_r = \frac{\tau_r}{d\tau_r/d\lambda} \quad (3-13)$$

式中 τ_r ——测试函数，例如 $\tau_r = \tau_j/w(i)$ ，在临界点处 $\tau_r=0$ 。

列出两节点系统电路方程然后消去相角变量得到式(3-14)，是一个关于 V_L 的四次方程，可以解出 V_L 。假设负荷功率 $P=P_0(1+\lambda)$ ， $Q=Q_0(1+\lambda)$ ，对 V_L 表达式求导计算出 $dV_L/d\lambda$ ，代入式(3-13)中得到 $\tilde{\tau}_r$ ，其中 $y_i=V_L$ 。该计算过程简单，但表达式非常冗长，所以不在此列出，仅列举一系列曲线对结果加以说明。

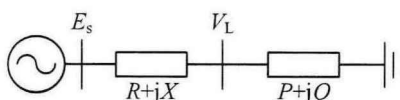


图 3-1 两节点系统

Fig. 3-1 Two node system

$$V_L^4 + (2(PR + QX) - E_s^2)V_L^2 + (P^2 + Q^2)(R^2 + X^2) = 0 \quad (3-14)$$

当 $E_s=1$ 、 $R=0.01$ 、 $X=0.1$ 、 $P_0=1$ ，单位都为 p.u.， $\tilde{\tau}_r$ 曲线如图 3-2 所示，当 Q_0 较小时，例如 $Q_0 \leq 1/2$ ，在临界点之前出现一个异常的突变点，因为分母 $d\tau_r/d\lambda$ 在突变点处等于 0。更特殊的情况，当 $Q_0=0$ ， $R=0$ 时， $\tilde{\tau}_r = -1 - \lambda$ ，显然这个结果不能正确判断电压稳定临界点，因为临界点处 $\tilde{\tau}_r=0$ 的性质消失了。当 Q_0 较大时，例如 $Q_0 \geq 3/4$ ， $\tilde{\tau}_r$ 的变化趋势近似线性，才能预测临界点的位置，即 $\tilde{\tau}_r=0$ 的位置。

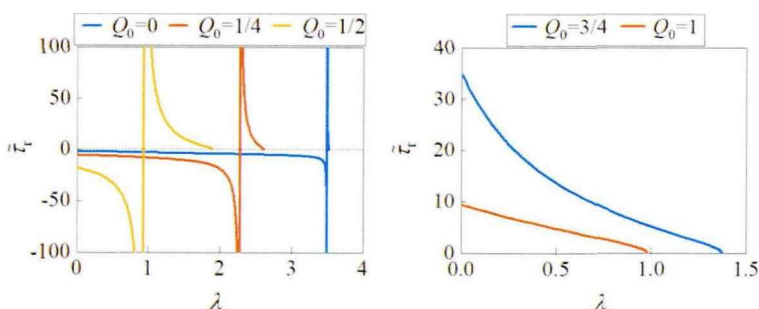


图 3-2 二阶指标曲线

Fig. 3-2 Two-order index curve

本文通过去掉二阶指标中分母的求导运算来解决这个问题，同时引入一个额外的参数 $\beta > 0$ ，提出一种线性程度好的鞍结型分岔点逼近指标，实现对鞍结型分岔点位置的预测，其定义见第 3.3.2 节。对于恒功率型负荷，其表达式如式(3-15)所示。

$$\tilde{\eta}_r = \frac{\eta_r}{\eta_r - \beta} \quad (3-15)$$

其中， $\eta_r = \tau_r \frac{y_i}{1+\lambda}$ ，在临界点处 $\eta_r=0$ 。

对于两节点系统， $\tilde{\eta}_r$ 的表达式：

$$\tilde{\eta}_r = \frac{2\Delta_r}{2\Delta_r + \beta(E_s^2 - \Delta_r)} \quad (3-16)$$

其中,

$$\Delta_r = \sqrt{-r_1(1+\lambda)^2 - r_2(1+\lambda) + E_s^4},$$

$$r_1 = 4(Q_0 R - P_0 X)^2 \geq 0, \quad r_2 = 4E_s^2(P_0 R + Q_0 X) \geq 0.$$

注意到 $E_s^2 - \Delta_r > 0$, 因此式(3-16)的分母始终大于 0。当 $\lambda+1=0$ 时, $\tilde{\eta}_r=1$, 在临界点处, $\Delta_r=0$, 所以 $\tilde{\eta}_r=0$ 。因此 $\tilde{\eta}_r$ 是一个从 1 到 0 的函数, 这个性质与 β 的取值无关。当 $\beta=2$ 时, $\tilde{\eta}_r = \Delta_r/E_s^2$, 是一个凹函数。当 β 非常大时, $\tilde{\eta}_r$ 是一个凸函数, 如图 3-3 所示, 图中曲线参数条件 $E_s=1$ 、 $R=0.01$ 、 $X=0.1$ 、 $P=1$, $Q_0=1/2$ 。因此总是存在一个中间的 β 值使得 $\tilde{\eta}_r$ 近似线性。合适的 β 取值方法在 3.3.2 节中介绍。

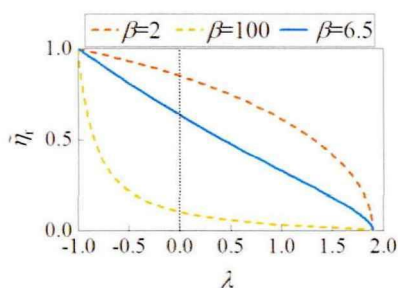


图 3-3 不同 β 值下的 $\tilde{\eta}_r$ 指标曲线

Fig.3-3 $\tilde{\eta}_r$ curve with different β

3.3 混合计算方法的实现

3.3.1 混合计算方法的计算流程

混合计算方法的整体计算流程如所图 3-4 示。其关键点在于所提出的鞍结型分岔点逼近指标决定了下一步计算是否从连续潮流法跳转到直接法, 避免了连续潮流法在分岔点附近步长减小计算量增加或者是步长过大会不收敛的问题, 同时为直接法提供了良好的计算初值。另外, 分别改进了连续潮流法和直接法的计算效率, 提升了混合算法的性能。图 3-4 中有四个关键的部分, 分别为鞍结型分岔点逼近指标、节点类型识别、失稳类型识别和鞍结型分岔点计算的改进直接法。下面对这四个部分分别进行介绍。

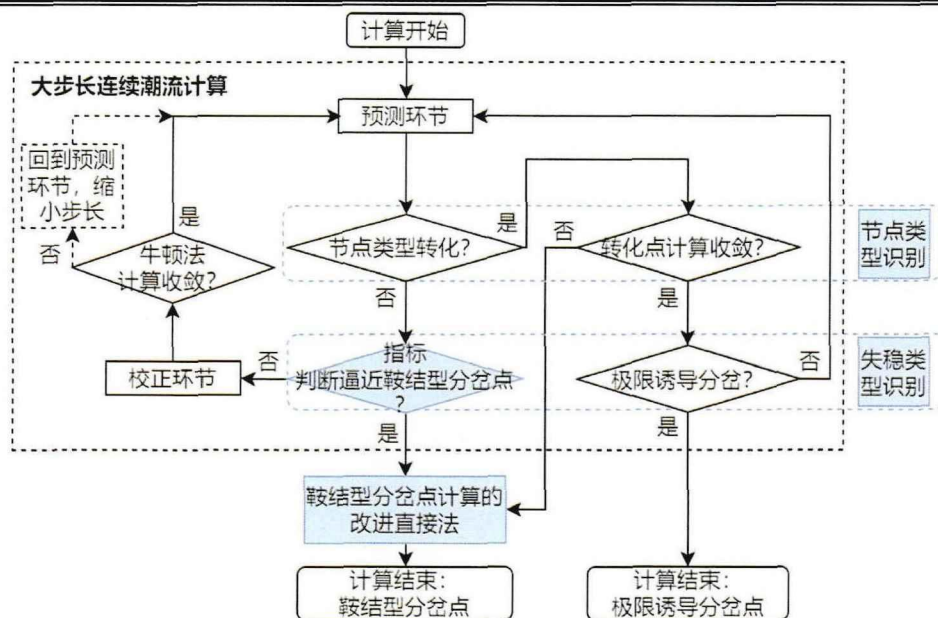


图 3-4 总体计算流程

Fig. 3-4 Overall calculation process

3.3.2 鞍结型分岔点逼近指标

3.3.2.1 指标的定义

为了根据连续潮流法计算过程中的解和参数 λ ，评估当前预测环节的参数 $\hat{\lambda}$ 是否逼近或者大于鞍结型分岔点的 λ 值，从而判断是否从连续潮流计算切换为直接法计算，第 i 个负荷节点的鞍结型分岔点逼近指标 c_i 在数值上应具备两个特征：

(1) 在鞍结点分岔点处等于 0。此性质能够保证在计算过程中通过该指标接近于 0 的程度而快速判断是否已接近鞍结型分岔点。

(2) 指标的数值随着参数 λ 增大应呈现近似线性的变化趋势。由于某一个参数 λ 所对应的指标值并不具有预测的能力，此指标的关键特征在于其数值随着参数 λ 增大的线性变化趋势。

定义：第 i 个负荷节点的鞍结型分岔逼近指标 η_i ：

$$\eta_i = \frac{d\lambda}{dV_i} \frac{1}{I_i} \quad (3-17)$$

式中 $d\lambda$ 、 dV_i ——负荷增长参数 λ 的微分与节点 i 的电压幅值的微分； $d\lambda/dV_i$ 可以通过连续潮流计算过程直接获取；

I_i ——负荷节点 i 的负荷电流。

指标 η_i 可以写成式(3-18)的形式，其中 $w(i)$ 与 τ_j 都是方程(3-10)的解， i 和 j 无关，可以任取 j 算出所有负荷节点的 η_i 值。而且 j 值的选择不会影响 η_i 值，因为它仅仅同比例的缩放切向量 w 和 τ_j 的幅值。根据方程(3-10)的性质，在鞍结型分岔点处 $\eta_i=0$ ，

因此指标 η_i 满足鞍结型分岔逼近指标的第二个特征。指标的第二个特征将通过修正方法和线性化方法得到。

$$\eta_i = \frac{\tau_i}{w(i)} \frac{V_i}{S_i(\lambda)} \quad (3-18)$$

式中 S_i ——负荷节点 i 的视在功率；

V_i ——负荷节点 i 的点电压幅值。

指标 η_i 还可以通过其物理意义得到直观解释。由于 $S_i = V_i I_i$ ，其微分为式(3-19)。

$$dS_i = I_i dV_i + V_i dI_i \quad (3-19)$$

因此，等式(3-19)两边同时对 V_i 求导得到式(3-20)。

$$\eta_i \frac{dS_i}{d\lambda} = 1 + \frac{V_i/I_i}{dV_i/dI_i} = 1 - \frac{Z_{Li}}{Z_{THi}} \quad (3-20)$$

式中 $dS_i/d\lambda$ ——节点 i 的视在功率的导数，也是负荷功率的增长方向在节点 i 上的投影，可以视为已知常量，那么容易使得其满足 $dS_i/d\lambda \neq 0$ ；

$Z_{Li} = V_i/I_i$ ——负荷等值阻抗模；

$Z_{THi} = -dV_i/dI_i$ ——动态等值阻抗模^[105]，通常所采用的戴维南等值阻抗采用电压和电流相量变化量的比值，这里仅仅采用幅值变化量的比值。

在物理意义上，式(3-20)的形式类似于阻抗模匹配指标，可以同样解释为在鞍结型分岔处，负荷等值阻抗模等于网络的动态等值阻抗模。

3.3.2.2 指标的修正方法

与其他鞍结型分岔点逼近指标一样，在发电机节点类型发生变化时，指标 η_i 可能会发生突变。通过对式(3-17)的定义式进行修正，该指标能够抵消潮流方程中节点类型变化带来的影响。因为该指标在突变点前后具有相似的变化斜率，所以只要消除突变量，即使在节点电压类型发生变化的情况下，保证指标随参数 λ 变化的光滑程度仍然较好。

处理方式：如图 3-5 所示，在第 l 步时，如果系统中存在节点类型的转化，导致 $\eta_i^{(l)}$ 突变为 $\hat{\eta}_i^{(l)}$ ，那么就将 λ_l 之前的鞍结型分岔点逼近指标均增加一个基于突变量 $\Delta\eta_i^{(l)}$ 的修正量，得到突变处理之后的鞍结型分岔点逼近指标值 $\hat{\eta}_i$ 。图 3-5 中蓝色虚线为突变处理前的指标值，红色实线为突变处理后的指标值， $\hat{\eta}_i$ 的计算公式如式(3-21)所示：

$$\hat{\eta}_i = \eta_i + \Delta\eta_i^{(l)} \quad (3-21)$$

式中 η_i ——修正前的指标值；

$\Delta\eta_i^{(l)}$ ——修正量， $\Delta\eta_i^{(l)} = \hat{\eta}_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}$ ， $\hat{\eta}_i^{(l)}$ 与 $\eta_i^{(l)}$ 分别表示 $\lambda = \lambda_l$ 时指标 η_i 在突变处理前后的值，如图 3-5 所示。

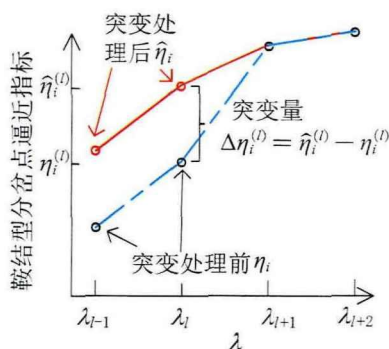


图 3-5 鞍结型分岔点逼近指标突变处理示意图

Fig. 3-5 Schematic diagram of sudden change treatment of saddle-node bifurcation point approximation index

如果存在多次突变，则进行多次修正即可。根据式(3-18)，得到突变量需要在节点类型转换点两次计算 PV 曲线的切线方向 w ，一次是用于节点类型转化前计算 $\eta_i^{(l)}$ ，另一次用于节点类型转化后计算 $\hat{\eta}_i^{(l)}$ 。节点类型转化后的切线用作下一步连续潮流的预测环节，节点类型转化前的切线可以基于节点类型转化点求解过程中的雅克比矩阵计算，所以增加的计算较小。

3.3.2.3 指标的线性化方法

随着负荷接近稳定极限，指标 η_i 的曲线近似呈分式曲线，所以可以通过一个分式形式的非线性变化将其变换为一个线性程度较好的指标 $\bar{\eta}_i$ ，以准确地评估在大步长连续潮流中评估潮流解的预测环节与鞍结型分岔点之间的逼近程度：

$$\bar{\eta}_i = \frac{\eta_i}{\eta_i - \beta_i} \quad (3-22)$$

其中参数 β_i 可以通过最小方差的方式辨识。令 η_i 为式(3-23)形式：

$$\eta_i = \frac{\alpha_1 \lambda + \alpha_2}{\lambda + \alpha_3} \quad (3-23)$$

将式(3-23)代入式(3-22)得到：

$$\bar{\eta}_i = \frac{\alpha_1 \lambda + \alpha_2}{(\alpha_1 - \beta_i) \lambda + \alpha_2 - \beta_i \alpha_3} \quad (3-24)$$

因此在式(3-23)的形式下辨识参数 α_1 ，然后令 $\beta_i = \alpha_1$ 即可得到线性程度较好的鞍结型分岔逼近指标 $\bar{\eta}_i$ 。

将式(3-23)等号右边的分母乘到等号左边，得到线性方程：

$$\alpha_1 \lambda - \eta_i \alpha_3 - \lambda \eta_i = \alpha_2 \quad (3-25)$$

根据式(3-25)，对参数 α_1 的辨识，等价于求解式(3-26)，使得 $\alpha_2 + (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l)^T$ 的方差最小。

$$\begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & -\eta_i^{(1)} & -\lambda^{(1)}\eta_i^{(1)} \\ \lambda^{(2)} & -\eta_i^{(2)} & -\lambda^{(2)}\eta_i^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^{(l)} & -\eta_i^{(l)} & -\lambda^{(l)}\eta_i^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_2 + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_l \end{pmatrix} \quad (3-26)$$

将以上最小方差的求解过程总结为辨识 β_i 参数的以下四个步骤。

步骤一：

$$A = [\lambda - E(\lambda), -\eta + E(\eta), -\lambda \cdot \eta + E(\lambda \cdot \eta)]$$

其中, $\lambda = [\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(l)}]^T$, $\eta = [\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}, \dots, \eta_i^{(l)}]^T$, $\lambda \cdot \eta = [\lambda^{(1)} \cdot \eta_i^{(1)}, \lambda^{(2)} \cdot \eta_i^{(2)}, \dots, \lambda^{(l)} \cdot \eta_i^{(l)}]^T$, $E(*)$ 表示求平均数。

步骤二：

$$\Sigma_i = \sum_j A_{j,:}^T A_{j,:}$$

式中 Σ_i ——样本的方差；

$A_{j,:}$ —— A 矩阵的第 j 行。

步骤三：求解式(3-27)中的 z 向量。

$$\begin{aligned} \min: & z^T \Sigma_i z \\ \text{st: } & \begin{cases} z(3) = 1 \\ \eta_i^{(1)} \cdot z(1) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-27)$$

其中, 第二个约束是为了使得 β_i 与 η_i 的符号异号, 避免式(3-22)中分母等于0。 $z(1)$ 与 $z(3)$ 分别表示 z 向量的第1个元素和第3个元素。步骤三是一个带约束的二次规划问题, 可以利用现有的工具很容易求解。

步骤四： $\beta_i = z(1)$ 。

3.3.3 节点类型识别的补逻辑

在求解临界点的过程中, 连续潮流法可以很容易的处理一些连续但不是处处可微的约束条件, 例如发电机节点在PV节点类型和PQ节点类型之间的转化。本小节介绍节点类型转化的方法, 以及提出补逻辑。将发电机无功功率方程写成式(3-28)。

$$Q_{Gi}(\lambda) = f_{qi}(\lambda) \quad (3-28)$$

式中 $Q_{Gi}(\lambda)$ ——发电机 i 发出的无功功率, 这里表示为 λ 的函数;

$f_{qi}(x)$ ——通过节点电压计算发电机节点 i 的无功功率的表达式。

然后对式(3-28)等号两边同时求导得到, 其中 $dy_j/d\lambda$ 由连续潮流方法中的预测环节得到。

$$\frac{dQ_{Gi}}{d\lambda} = \frac{df_{qi}}{dy_j} \frac{dy_j}{d\lambda} \quad (3-29)$$

根据发电机无功的上限值和下限值,计算每个发电机节点的 λ 增量的估计值 $\Delta\hat{\lambda}_i$,如式(3-30)所示:

$$\Delta\hat{\lambda}_i = (Q_i^{\text{lim}} - Q_{Gi}) / (dQ_{Gi}/d\lambda), i \in G_{PV} \quad (3-30)$$

$$\Delta\hat{\lambda}_i = (V_{Gi}^{\text{set}} - V_{Gi}) / (dV_{Gi}/d\lambda), i \in G_{PQ} \quad (3-31)$$

式中 G_{PV} 、 G_{PQ} ——发电机节点中 PV 节点的集合、发电机节点中 PQ 节点的集合;

V_{Gi} ——PV 节点电压幅值, $dV_{Gi}/d\lambda$ 由连续潮流方法中的预测环节得到;

V_{Gi}^{set} 、 Q_i^{lim} ——节点电压额定幅值、节点的无功功率限值(包括上下限)。

然后取增量 $\Delta\hat{\lambda}_i$ 大于 0 中的最小值作为节点类型发生转化的估计点,如式(3-32)和式(3-33)所示。

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \lambda + \Delta\lambda & \text{当 } \Delta\lambda < \Delta\hat{\lambda} \\ \lambda + \Delta\hat{\lambda} & \text{当 } \Delta\lambda \geq \Delta\hat{\lambda} \end{cases} \quad (3-32)$$

$$\hat{y} = y + (\hat{\lambda} - \lambda) dy/d\lambda \quad (3-33)$$

式中 $\Delta\hat{\lambda} = \min_{\Delta\hat{\lambda}_i > 0} \{\Delta\hat{\lambda}_i, i \in G_{PV} \cup G_{PQ}\}$ ——连续潮流预测环节计算得到的 λ 增量。

以式(3-32)和式(3-33)得到的预测值 $(\hat{y}, \hat{\lambda})$ 为校正环节的迭代初始值,采用文献[53,161]的方法,能够直接计算出节点类型发生转化时的临界状态,即预判发生节点类型转化的发电机节点无功达到限值且发电机电压等于设定值的潮流解。计算思路为:在原潮流方程的基础上增加一个方程,以预判达到限制的发电机输出无功或预判从 PQ 节点类型恢复 PV 节点类型的发电机电压幅值作为已知量,以参数 λ 作为未知量,求解增广潮流方程。

但是当两个节点几乎同时发生类型转换时,提前预判节点类型转化难以识别其先后顺序,可能收敛到不满足发电机无功限制的解。为了避免这种情况下的多次缩小步长再次计算校正环节,增加以下两个补逻辑:

1) 当预判节点 i 将发生节点类型转化,通过计算收敛之后,节点 j 出现了越限,那么将节点 j 的类型转换之后,重新计算节点 i 的节点类型转化临界点。

2) 如果预判节点 i 和节点 j 发生节点类型转换时刻的 λ 值之差小于 ε ,且按照补逻辑 1 转换节点 i 的类型后仍然有新的发电机节点出现越界,那么就恢复节点 i 的节点类型,再以节点 j 作为类型转换的关键节点计算其节点类型转化的临界值。其中 ε 可以取一个较小的数,例如 $\varepsilon=0.001$ 。

通过大量算例计算发现,在绝大多数情况下,补逻辑 1 就足以处理节点类型识别问题。当 λ 的预测值 $\hat{\lambda}$ 越过其极限点时,以上两个补逻辑下计算仍然可能发散。因此,这种情况下则直接进入鞍结型分岔直接计算步骤。

3.3.4 失稳类型的识别

当考虑了不可微的约束条件之后,需要识别临界点是极限诱导分岔还是鞍结型分岔。失稳类型的正确识别依赖于前面节点类型转化的识别和鞍结型分岔点逼近指标的失稳判断。所以在计算流程上先识别节点类型转化,然后判断失稳类型。

每次计算得到节点类型转化临界点之后,节点类型转化前和转化后的切向量的符号变化能够判断该点是否为极限诱导分岔点^[162,163]。如果是极限诱导分岔,则不需要进入鞍结型分岔计算的直接法,直接输出结果。

当鞍结型分岔点逼近指标判断鞍结点时,就不用再进入连续潮流的校正环节,转为采用鞍结型分岔点的直接计算方法,能够快速收敛到分岔点。判断的方法如下:

(1) 在每一步连续潮流法的校正环节求解前,综合突变处理前的指标 η_i 与母线电压幅值选择薄弱母线 k 。比较所有负荷节点的鞍结型分岔点逼近指标 η_i 值,将其绝对值从小到大排序,记节点 i 的序号为 $O_{rd}(\eta_i)$ 。相似地,将负荷电压母线的电压幅值也从小到大排序,记节点 i 地序号为 $O_{rd}(V_i)$,然后计算 $O_{rd}(\eta_i) + O_{rd}(V_i)$,取结果最小的母线编号为 k 。

(2) 针对母线 k 的指标 η_k 进行突变修正和非线性变换,得到的变换之后逼近指标记为 $\bar{\eta}_k$ 。

(3) 利用最小二乘法对 $\bar{\eta}_k$ 进行线性拟合,拟合结果如式(3-34)所示。假设当前为连续潮流计算的第 l 步, $\lambda = \lambda^{(l)}$,因此 λ 的取值范围小于等于 $\lambda^{(l)}$ 。

$$\bar{\eta}_k \approx \rho_1 \lambda + \rho_2, \lambda \leq \lambda^{(l)} \quad (3-34)$$

(4) 在第 l 步比较连续潮流预测环节的负荷增长参数 $\hat{\lambda}^{(l)}$ 是否满足式(3-35),如果满足,则判定当前步已越过鞍结型分岔点;否则进行下一步的连续潮流计算。

$$\hat{\lambda}_l \geq \lambda_l - \bar{\eta}_k^{(l)} / \rho_1 \quad (3-35)$$

其中, $\bar{\eta}_k^{(l)}$ 表示指标 $\bar{\eta}_k$ 在 $\lambda = \lambda^{(l)}$ 时的值。

通过 $\lambda \leq \lambda^{(l)}$ 的指标值和当前预测环节的参数 $\hat{\lambda}^{(l)}$,可以提前判断当前步的潮流解是否已经越过鞍结型分岔点,从而判断是否进入鞍结型分岔直接计算。

整体的具体决策过程见图 3-4。为了提高算法的鲁棒性,保留了回到预测环节缩短步长再次计算校正环节的处理方式。

3.3.5 海森矩阵隐式计算的改进直接法

针对直接法中海森矩阵计算量大的瓶颈问题,提出了海森矩阵隐式计算方法,显著提高了直接法的计算效率。电压稳定的鞍结型分岔点计算等同于求解以下扩展方程中的 (y, λ) 。

$$\begin{cases} F(y, \lambda) = 0 \\ \zeta(y, \lambda) = \text{rank}(f_y) - (n-1) = 0 \end{cases} \quad (3-36)$$

式中 $\text{rank}(\cdot)$ ——矩阵的秩；

$\zeta(y, \lambda)$ ——测试函数， $\zeta(y, \lambda)=0$ 是鞍结型分岔点的判据。

方程(3-36)的解即为鞍结型分岔点。利用牛顿法求解时需要形成方程(3-36)的增广雅克比矩阵 $\tilde{J}$ ，如式(3-37)所示。 F_y ， F_λ 的定义同式(3-10)， $\zeta_y = \partial \zeta / \partial y$ ， $\zeta_\lambda = \partial \zeta / \partial \lambda$ 。

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} F_y & F_\lambda \\ \zeta_y & \zeta_\lambda \end{pmatrix} \quad (3-37)$$

函数 ζ 的表达式具有不同的等价形式。本章采用式(3-38)形式的函数 ζ ，与式(3-36)中的形式等价^[152,164]，那么通常 $\zeta_\lambda=0$ 。

$$\zeta = (d - c^T A^{-1} b) \quad (3-38)$$

式中 A —— F_y 矩阵中去掉第 k 行第 k 列后剩下的部分；

B —— F_y 中第 k 列中除 k 行之外的元素；

c^T —— F_y 中的第 k 行中除第 k 列之外的元素；

d —— F_y 矩阵中第 k 行第 k 列的元素。

k 是一个需要设定的参数，对直接法的收敛性有直接影响，本章选择 k 值的方法与鞍结型逼近指标预测时选择薄弱母线 k 的方法相同。

偏导数 ζ_y 需要求解式(3-38)中矩阵 A 的导数，也是 $F(y)$ 在 y 点处展开的海森矩阵的一部分^[165]。由于海森矩阵属于三维矩阵，在大系统中其维度非常高，不利于算法快速求解。尽管对于电力系统的潮流方程，其海森矩阵高度稀疏，但稀疏矩阵计算技术很难在三维矩阵上直接利用。

本章在引理 3.1 的基础上表示 ζ_y ，并推导海森矩阵的隐式计算方法。将式(3-11)等号两边第一行分块矩阵左乘 u^T ，与式(3-12)联立得到：

$$\zeta = u^T F_y W \quad (3-39)$$

取 $R = (0_{1 \times n} \ 1)^T$ ， $T^T = (0_{1 \times n} \ 1)$ ， $W = P^{-1}(-(A^{-1}b)^T \ 1)^T$ ， $u^T = (-c^T A^{-1} \ 1)P$ 。其中矩阵 P 为一个置换矩阵，用于将雅克比矩阵 F_y 中的第 k 行 k 列移动到最后一行一列。置换矩阵与矩阵 F_y 相乘可以得到如式(3-40)所示的分块形式，其中 $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ ， $b \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ ， $c \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ ， $d \in \mathbb{R}$ 。那么，将 R ， T ， u 和 W 的表达式代入式(3-39)中就可以得到式(3-38)。说明在以上条件下，式(3-38)中的函数 ζ 适用于引理 3.1。

$$(3-40)$$

进一步通过式(3-11)和式(3-12)求解 ζ 对代数变量 y 求导的表达式。记 ζ 对任意变量的导数为 ζ' ，对式(3-39)等号两边同时求导得到式(3-41)。

$$\zeta' = (u^T)'(F_y W) + u^T (F_y)' W + u^T F_y W' \quad (3-41)$$

根据式(3-11)和式(3-12)中 $F_y W = R\zeta$ 和 $u^T F_y = \zeta^T T^T$, 式(3-41)可以改写为以下形式。

$$\zeta' = (u^T)' R \zeta + u^T (F_y)' W + \zeta^T T^T W' \quad (3-42)$$

根据式(3-11)和式(3-12)中, $T^T W = 1$ 和 $u^T R = 1$, 得到

$$T^T W' = -(T^T)' W \quad (3-43)$$

$$(u^T)' R = -u^T R' \quad (3-44)$$

由于向量 T 向量 R 为常数向量, 所以式(3-43)和(3-44)中的 T' 和 R' 都等于全 0 的向量。因此, 将式(3-43)和式(3-44)代入式(3-42), 得到 ζ 对任意参数的导数, 如式(3-45)所示。

$$\zeta' = u^T (F_y)' W \quad (3-45)$$

将式(3-45)应用到对所有代数变量求导, 得到 ζ_y 的表达式。

$$\zeta_y = [u^T (F_{yy})_{:,1} W, u^T (F_{yy})_{:,2} W, \dots, u^T (F_{yy})_{:,n} W] \quad (3-46)$$

式中 F_{yy} ——代数方程组的海森矩阵, $(F_{yy})_{:,i} = \partial F_y / \partial y_i$, $i=1,2,\dots,n$ 。

根据方向导数的定义, 沿着向量 W 的方向导数等于函数梯度与方向向量 W 的内积, 即:

$$\frac{(F_y(y + \varepsilon W, \lambda))_{i,j} - (F_y(y, \lambda))_{i,j}}{\varepsilon} \approx \nabla \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right) W = \frac{\partial (\nabla F_i)}{\partial y_j} W \quad (3-47)$$

其中, ∇ 表示梯度算子, 有 $\nabla F = F_y$ 。下标 (i,j) 表示矩阵中第 i 行第 j 列的元素。单个下标 i 或者 j 表示向量中第 i 个或者第 j 个元素。

同理可得式(3-48), 进一步得到式(3-49)。

$$\frac{(F_y(y + \varepsilon W, \lambda))_{:,j} - (F_y(y, \lambda))_{:,j}}{\varepsilon} \approx \frac{\partial (\nabla F)}{\partial y_j} W = \frac{\partial F_y}{\partial y_j} W \quad (3-48)$$

其中, 下标 $(:,j)$ 表示矩阵的第 j 列。

$$\zeta_y \approx u^T \frac{F_y(y + \varepsilon W, \lambda) - F_y(y, \lambda)}{\varepsilon} \quad (3-49)$$

以上分析过程说明, 只需要把向量 W 当作 y 的一个增量, 在这个增量方向上再次形成雅克比矩阵, 就可以很方便的计算出 ζ_y 。该方法计算量小, 很容易在现有的潮流计算程序上实现。 ε 可以取一个较小的数值, 理论上 ε 取得越小, ζ_y 的计算结果越精确, 但是还需要考虑数值计算过程中的舍入误差, 所以不宜取得过小。对于双精度浮点数, 可以设置 $\varepsilon=10^{-7}$ 。

3.4 基于混合计算方法的奇异点计算

对于奇异点的计算, 如式(3-9)所示, 由于将状态变量 x 看作已知量 x_0 , 就可以

简化前面所提出的混合计算方法。对于同步发电机，其内部节点看作平衡节点，不需要处理 PV 节点类型。

根据电力网络方程和功率平衡建立代数方程式(3-50)。

$$F(y, \lambda) = \text{diag}(y_i^*) Y_1 y + \text{diag}(y_i^*) Y_2 x_0 + S^* = 0 \quad (3-50)$$

式中 Y_1 、 Y_2 ——网络导纳矩阵， $Y_1 = G_1 + jB_1$ ；

x_0 ——状态变量，例如发电机的功角和内电势幅值，可以看作平衡节点；

y ——代数变量， $y = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ ， $y_i = V_i(\cos(\theta_i) + j \sin(\theta_i))$ ， V_i 和 θ_i 分别表示母线 i 的电压幅值和相角；

$\text{diag}(y_i^*)$ ——表示以 y_i^* 为对角线元素的对角矩阵， $i=1, 2, \dots, n$ ；

S^* ——节点流出的功率， $S^* = [S_1^*, S_2^*, \dots, S_m^*]$ ，右上角*表示求共轭，

$S_i = (P_{i,0} + j Q_{i,0}) V_i^{\alpha} + \lambda(\Delta P_i + j \Delta Q_i) V_i^{\alpha}$ ；对于恒功率型设备， $\alpha=0$ ；

对于电流源型设备， $\alpha=1$ ；对于阻抗型设备， $\alpha=2$ 。

将表达式 F 的实部和虚部分开记作 F_R 与 F_I ，得到的雅克比矩阵 F_y 为：

$$F_y = \frac{\partial(F_R, F_I)}{\partial(V, \theta)} = \begin{bmatrix} \text{diag}(V_i) & 0 \\ 0 & \text{diag}(V_i) \end{bmatrix} J_{\text{alg}} \begin{bmatrix} I_E & 0 \\ 0 & \text{diag}(V_i) \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

式中 I_E ——单位矩阵；

$$J_{\text{alg}} = \begin{bmatrix} J_{RV} & J_{R0} \\ J_{IV} & J_{I0} \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

式中 $J_{RV} = G \cos \theta + B \sin \theta + \text{diag}(-F_{P,i} V_i^{-2} + (P_{i,0} + \lambda \Delta P_i) \alpha_i V_i^{\alpha-2})$ ；

$J_{IV} = -G \sin \theta + B \cos \theta + \text{diag}(F_{Q,i} V_i^{-2} - (Q_{i,0} + \lambda \Delta Q_i) \alpha_i V_i^{\alpha-2})$ ；

$J_{R0} = G \sin \theta - B \cos \theta + \text{diag}(F_{Q,i} V_i^{-2})$ ；

$J_{I0} = G \cos \theta + B \sin \theta + \text{diag}(F_{P,i} V_i^{-2})$ 。

$F_{P,i}$ —— $F_{P,i} = -\text{real}(\text{diag}(y_i^*) Y_1 y + \text{diag}(y_i^*) Y_2 x_0)_i$ ，第 i 个节点流出的有功功率，在满足等式(3-50)时 $F_{P,i} = (P_{i,0} + \lambda \Delta P) V_i^{\alpha}$ ， real 表示取实部；

$F_{Q,i}$ —— $F_{Q,i} = \text{imag}(\text{diag}(y_i^*) Y_1 y + \text{diag}(y_i^*) Y_2 x_0)_i$ ，第 i 个节点流出的无功功率，在满足等式(3-50)时 $F_{Q,i} = (Q_{i,0} + \lambda \Delta Q) V_i^{\alpha}$ ， imag 表示取虚部。

$G \cos \theta$ 是一种简化的写法，其第 i 行 j 列的元素为 $G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)$ ，矩阵 $G \sin \theta$ 、 $B \cos \theta$ 、 $B \sin \theta$ 第 i 行 j 列的元素分别为 $G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)$ 、 $B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)$ 、 $B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)$ 。

海森矩阵的隐式计算方法需要 $\zeta_i=0$ ，但式(3-52)中含有参数 λ ，因此需要对其变形以消去 λ 。由于在迭代过程中 $F_{P,i} \approx (P_{i,0} + \lambda \Delta P) V_i^{\alpha}$ ， $F_{Q,i} \approx (Q_{i,0} + \lambda \Delta Q) V_i^{\alpha}$ ，因此，求解计算过程中可以通过式(3-53)近似式(3-52)。而且等式(3-50)的解使得式(3-53)

与(3-52)相等。

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\text{alg}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\text{RV2}} & \mathbf{J}_{\text{R02}} \\ \mathbf{J}_{\text{IV}} & \mathbf{J}_{\text{I0}} \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

式中 $\mathbf{J}_{\text{RV2}} = \mathbf{G}\cos\theta + \mathbf{B}\sin\theta + \text{diag}(F_{\text{P},i}(\alpha_i - 1)V_i^{-2})$;

$$\mathbf{J}_{\text{IV2}} = -\mathbf{G}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta + \text{diag}(-F_{\text{Q},i}(\alpha_i - 1)V_i^{-2})。$$

将式(3-51)代入到式(3-10)和式(3-18)得到鞍结型分岔点逼近指标。将式(3-50)和(3-51)代入式(3-36)、(3-38)和(3-49)得到鞍结型分岔点的改进直接法。奇异点的计算流程如图 3-6 所示,计算仍然分为两步,大步长连续潮流计算与直接法计算,但在大步长连续潮流中去掉了节点类型识别和失稳类型识别。

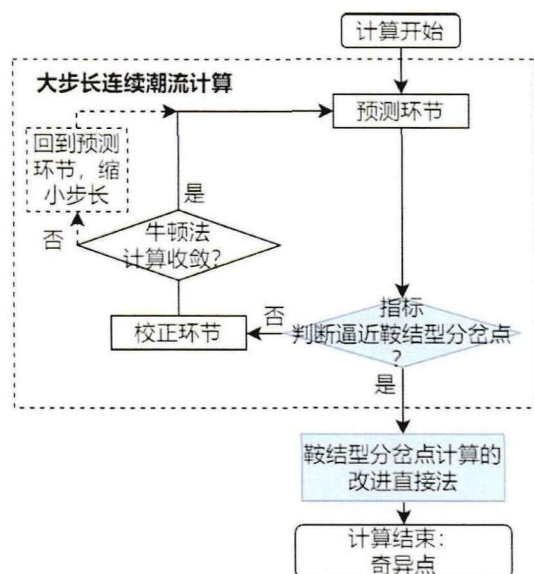


图 3-6 奇异点计算流程

Fig.3-6 Singularity calculation process

奇异点的计算在本文第 5 章的分析中也会被反复运用。奇异点的必要条件 $\det(\mathbf{F}_y) = 0$, 在一些特殊的情况下可以简化求解, 这在第 5 章的分析中会具体介绍。

3.5 算例分析

在配置为 i7-8700 处理器、8 G 内存的计算机上, 用软件 Matlab 编制本章提出的计算程序, 以算例 case2736sp, case2869pagase, case6468rte^[166], case9241pegase^[167] 为例进行分析, 其网络规模分别为 2736 条母线, 2869 条母线, 6468 条母线, 和 9241 条母线。本节选择了两种负荷功率增长方式, 增长模式 1 表示全系统负荷功率增长的情况, 假设全系统的负荷有功功率、无功功率等比例增长, 全系统的发电机(平衡节点除外)发出的有功功率也等比例增长以分担负荷功率。增长模式 2 表示局部区域负荷功率增长的情况, 假设编号最小的 10 个负荷节点的有功功率与无功功率

等比例增长, 全系统的发电机(平衡节点除外)等比例增长有功功率以分担负荷功率。大步长连续潮流采用拟弧长的参数化方法, 直接法中采用隐式海森矩阵计算方法。

3.5.1 鞍结型分岔点逼近指标性能的验证

尽管节点类型转化会造成鞍结型分岔点逼近指标的突变, 图 3-7 表明所提出的式(3-21)的处理方式可以得到整体光滑性较好的指标变化曲线, 鞍结型分岔点逼近指标的突变点的不连续特性得到了很好的修正, 修正后的连续性是该指标在非线性变换后呈现线性特征的基础。

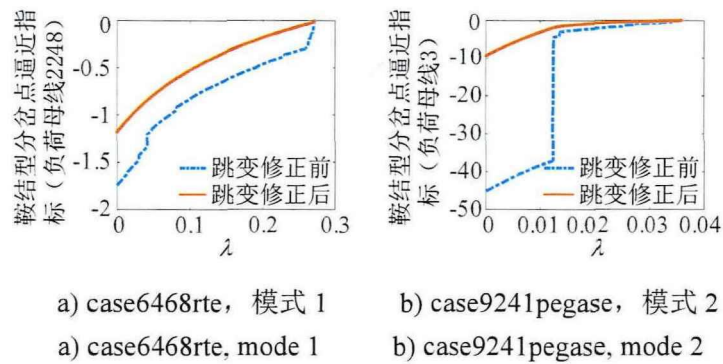


图 3-7 鞍结型分岔点逼近指标(非线性变换前, 突变修正前后)

Fig. 3-7 Saddle-node bifurcation point approximation index (before nonlinear transformation, whether jump corrected or not)

基于修正后的结果, 通过参数 β 的辨识和式(3-22)的非线性变换, 得到的鞍结型分岔点逼近指标就具有了比较理想的线性趋势, 如图 3-8 所示。

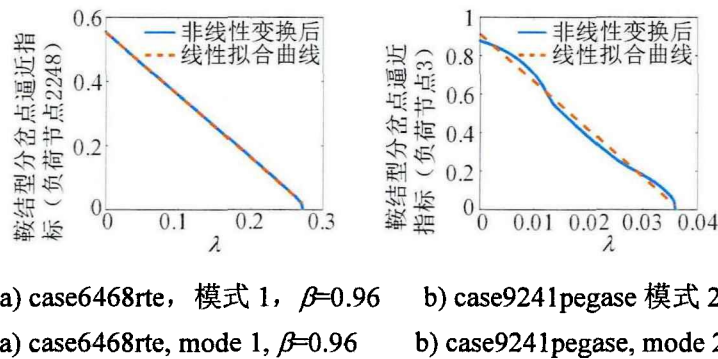


图 3-8 鞍结型分岔点逼近指标(非线性变换后)

Fig. 3-8 Saddle-node bifurcation point approximation index (after nonlinear transformation)

case2736sp 和 case2869pagase 算例的结果与图 3-7 和图 3-8 非常相似, 所以在此省略。以上结果验证了所提出的鞍结型分岔点逼近指标的优势: 在经过节点类型转化造成的突变修正和非线性变换之后, 具有较好的线性特征。

3.5.2 方法有效性的验证

3.5.2.1 补逻辑的有效性

考虑发电机节点类型转化，拟弧长的预测步长 $\sigma=1.0$ ，计算不同算例、不同负荷增长模式下的静态电压失稳分岔点。计算过程中所触发的补逻辑次数如表 3-1 所示。

表 3-1 中 SNB 表示鞍结型分岔，LIB 表示极限诱导分岔。结果表明，在绝大多数情况下，补逻辑 1 就足够有效地避免节点类型转化造成的缩小步长和再次计算校正环节。仅在 case2736sp 系统的负荷增长模式 2 的计算过程中触发了补逻辑 2。

表 3-1 补逻辑触发次数比较

Table3-1 Comparison of trigger times of complementary logic

算例	增长模式	补逻辑 1 触发次数	补逻辑 2 触发次数	节点类型转化次数	分岔点类型
case2736sp	1	25	0	160	SNB
	2	37	1	249	LIB
case2869pegase	1	0	0	87	SNB
	2	0	0	184	LIB
case6468rte	1	8	0	104	SNB
	2	8	0	105	SNB
case9241pegase	1	0	0	159	SNB
	2	1	0	185	SNB

在算例 case6468rte 中，母线 6372 与母线 1366 几乎同时发生节点类型转化。补逻辑 1 在 PV 曲线上表现为如图 3-9 所示曲线。在预测步长比较大的情况下($\sigma=1.0$)通过式(3-30)和式(3-31)会错误地识别到母线 1366 先发生节点类型转化，造成母线 6372 的无功越界。但是通过补逻辑 1，将母线 6372 转化为 PQ 节点后，计算结果正确的收敛到了正确解 ($\sigma=0.1$)。说明补逻辑保证了大步长连续潮流计算的正确性。

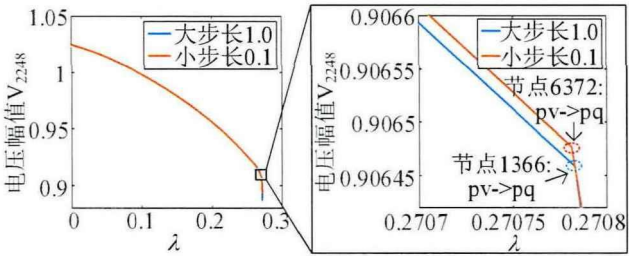


图 3-9 补逻辑 1 示意图：case6468rte，增长模式 1

Fig. 3-9 Complementary logic 1 in PV curve: case6468rte in mode 1

3.5.2.2 计算精度比较

由于计算结果都是收敛后的潮流值，计算误差都在 10^{-10} 以下，因此不论是本章方法还是连续潮流计算方法，所得到的计算结果都在 PV 曲线上。

图 3-10 比较了不同步长下的分岔点计算结果。可以看出：1) 本章的方法通过直接法计算分岔点，计算精度不受连续潮流步长的影响；而采用连续潮流法计算分岔点的结果会受到预测步长影响。2) 由于所得到的计算结果都在 PV 曲线上，且本章方法的计算结果都大于等于传统连续潮流的计算结果，说明本章的计算结果更加接近鞍结型分岔点。case2736sp 和 case2869pagase 算例的结果与图 3-7 和 图 3-8 非常相似，所以在此省略。

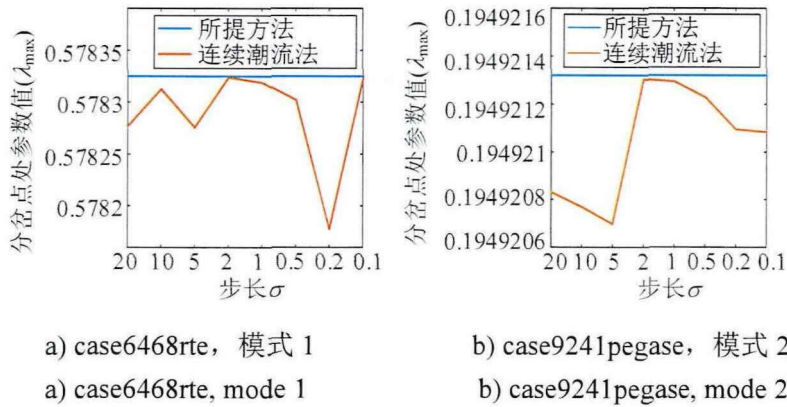


图 3-10 临界点计算精度的比

Fig. 3-10 Comparison of calculation accuracy of critical point

3.5.3 方法性能的验证

3.5.3.1 计算速度比较

为了比较步长大小对于鞍结点附近牛顿法计算收敛性以及计算速度的影响，不考虑发电机无功功率限制，比较以上四个算例在不同步长下的计算时间，如图 3-11 所示。

图 3-11 中蓝色线表示本章所采用的修正方法：通过鞍结型分岔点逼近指标评估运行点是否接近运行极限，然后通过直接法计算分岔点。红色线表示采用拟弧长参数化方法的连续潮流计算方法。当连续潮流法计算过程中校正环节的牛顿法计算发散时，将步长缩小为原来的一半，再次计算校正环节^[53]。

在连续潮流法的计算中，如果逼近临界点且步长过大，例如图 3-11 中步长等于 20 的情况，因牛顿法计算不收敛或者收敛慢，造成更多的校正环节重复计算以及更多的牛顿法迭代次数，反而降低了计算速度。

图 3-11 中的计算结果表明，在相同预测步长的情况下，本章方法比连续潮流法计算速度快，大步长下前者计算时间约为后者的 1/3 到 1/2。这说明通过本章提出的鞍结型分岔点逼近指标预测逼近鞍结型分岔的程度，判断当系统运行点接近负荷增长极限时，转为直接法计算鞍结型分岔具有计算速度上的优势。

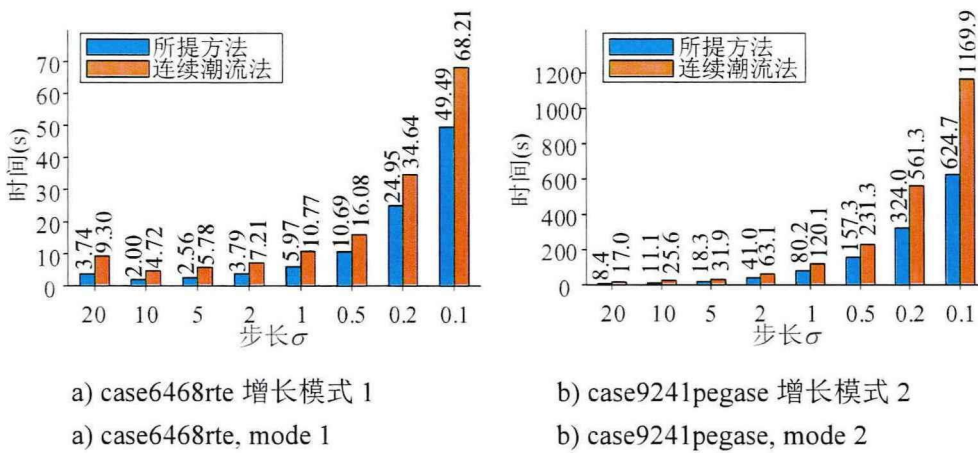


图 3-11 计算时间比较

Fig. 3-11 Comparison of computation time

3.5.3.2 海森矩阵隐式计算效率

目前的稀疏矩阵技术针对二维矩阵与二维矩阵或二维矩阵与向量的运算进行了优化，且本章的隐式形成海森矩阵能够比较方便地利用现有的稀疏矩阵技术。但是显式形成的海森矩阵属于三维矩阵，不方便直接利用现有稀疏矩阵技术，所以两者之间的计算时间难以进行有效的比较。因此，本章通过比较计算的非零元素个数与乘法次数来进行说明。

表 3-2 隐式海森矩阵与显式海森矩阵的计算量比较 (单位 1 等于导纳矩阵的非 0 元素个数)

Table 3-2 Comparison of calculation amount of implicit Hessian matrix and explicit Hessian matrix (unit 1 is equal to the number of non-zero elements of admittance matrix)

算例	隐式海森矩阵的乘法数量	显式海森矩阵的乘法数量
case2736sp	11.873	17.254
case2869pegase	11.815	16.523
case6468rte	12.075	18.635
case9241pegase	11.877	16.881

显式计算式(3-46)中的海森矩阵 $F_{yy}W$ ，乘法计算的次数约等于 F_{yy} 中非零元素的个数，因为向量 W 是稠密的。隐式的海森矩阵形成方法需要形成一次雅克比矩阵的计算量(这里指的是额外形成 $F_y(y+\varepsilon W, \lambda)$ ，因为在计算 ζ_y 之前 $F_y(y, \lambda)$ 已经得到)。根据 F_{yy} 矩阵的元素组成，通过 0 的方法估计非零元素个数，从而估计形成过程中的乘法次数，如表 3-2 所示。分析结果表明，在各个算例下隐式海森矩阵的计算量都小于显式海森矩阵的计算量，前者计算量约为后者的 2/3，而且隐式方法更容易在现有的潮流计算程序上实现。

3.5.4 奇异点计算方法的验证

3.5.4.1 IEEE39 系统算例 1：恒功率特性

IEEE39 系统拓扑连接见附录 B 中图 B-1 所示，在母线 8 和母线 15 分别接入电动机负荷，负荷的仿真参数见附录 B 中表 B-5，在奇异点的计算过程中，电动机处理为恒功率特性负荷，即 $\alpha_i=0$ 。按照本章提出的混合法计算奇异点裕度，计算流程如图 3-6 所示。在母线 27 发生瞬时三相短路故障，故障持续时间 0.098 秒，每隔 2 毫秒计算一次奇异点，计算结果如图 3-12 a)所示，对应于第 5 章中的负荷功率裕度指标 L_M 。

图 3-12 a)中红色实线和蓝色实线分别表示混合法计算流程中大步长连续潮流的输出与最终的计算结果。两条曲线之间差异较小说明大步长连续潮流（CPF）的结果就能够估计奇异点的大概位置，在精度要求不高的情况下可以通过该结果快速地估计奇异点的裕度。图 3-12 中奇异点裕度和电压幅值的大小的变化趋势一致，在电压最低点时刻附近的 3.609 秒遇到奇异点，说明两者高度相关，与已有的奇异点导致暂态电压失稳的观点相吻合。本文第 4 章和第 5 章从功角稳定和电压稳定之间联系的角度，更加详细地分析了奇异点附近的轨迹。

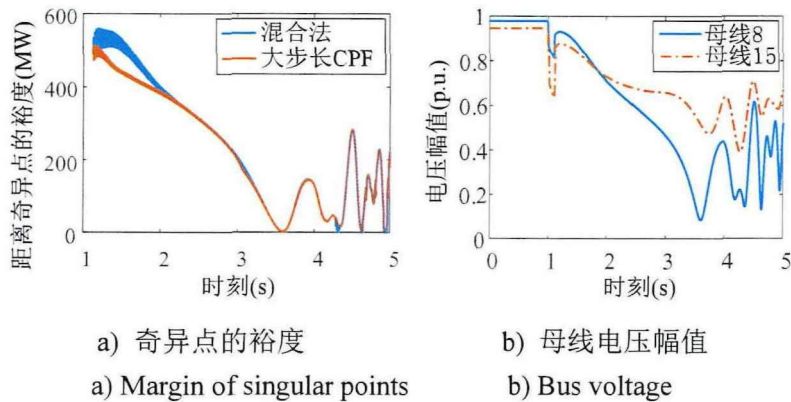


图 3-12 计算结果（故障持续时间 0.098 秒）

Fig. 3-12 calculation results (failure duration is 0.098 seconds)

图 3-13 对本章提出的混合法与连续潮流法的计算性能进行对比，其中迭代次数是指利用因子表求解线性方程组的次数，结果表明了混合法的性能优势。按照拟弧长参数化方法，步长都取 0.5p.u.。计算的停止条件为鞍结型逼近指标 η_i 绝对值小于 0.0001，在连续潮流法中如果不满足该停止条件则将计算步长缩小一半利用二分法搜索。混合法的平均迭代次数为 15.84 次，而连续潮流的平均迭代次数为 46.81 次，后者接近前者的 3 倍。如图 3-13a)中蓝色实线和红色实线所示，因为混合法基于鞍结型逼近指标在奇异点附近从连续潮流法切换为直接法（PoC），而直接法的收敛速度较快（除了极少情况迭代次数反而增加），所以混合法极大地提高了计算速度。

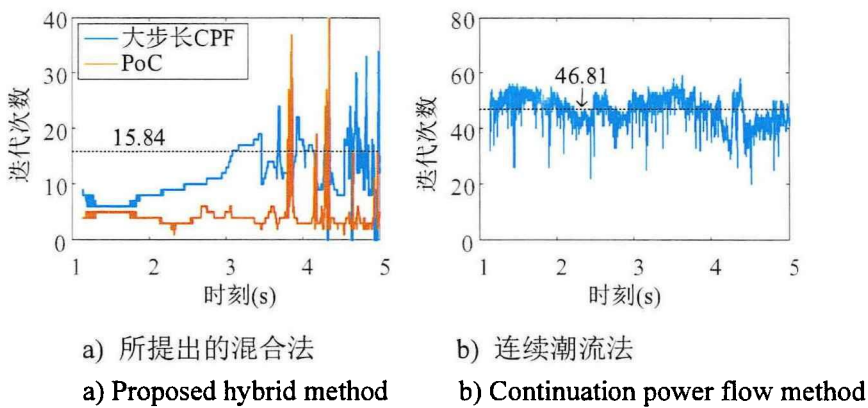


图 3-13 计算量的比较

Fig.3-13 Comparison of calculated quantities

3.5.4.2 IEEE39 系统算例 2：恒电流特性

在 IEEE39 系统中的母线 7、8、4 分别接入变流器，如附录 B 中图 B-2 所示。在奇异点的计算过程中，变流器处理为恒电流特性，即 $\alpha_i=1$ 。按照本章提出的混合法计算奇异点裕度。在母线 14 发生瞬时三相短路故障，故障持续时间 0.165 秒，每隔 2 毫秒计算一次奇异点，计算结果如图 3-14a)所示，标幺化的基准值为 600MVA（电压为 1p.u.时的功率），对应于第 5 章中的变流器运行裕度指标 C_M 。

图 3-14 a)的结果与图 3-12a)相似，混合法中的大步长连续潮流法（CPF）结果可以近似奇异点的位置。距离奇异点的稳定裕度按照稳态时的变流器电流幅值进行标幺化，除了在轨迹越过奇异点时出现剧烈的振荡，变化趋势与变流器所连母线的电压幅值也基本一致，说明这是奇异点的性质。

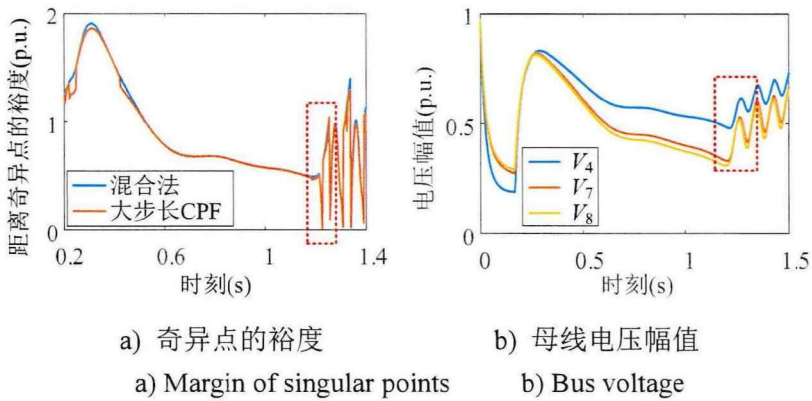


图 3-14 计算结果（故障持续时间 0.165 秒）

Fig.3-14 calculation results (failure duration is 0.165 seconds)

图 3-15 同样对比了本章提出的混合法与连续潮流法的计算性能，图中的步长和停止条件设置与图 3-13 相同。混合法的平均迭代次数为 18.40 次，而连续潮流的平均迭代次数为 54.35 次，后者仍然接近前者的 3 倍，结果表明了混合法的性能优势。

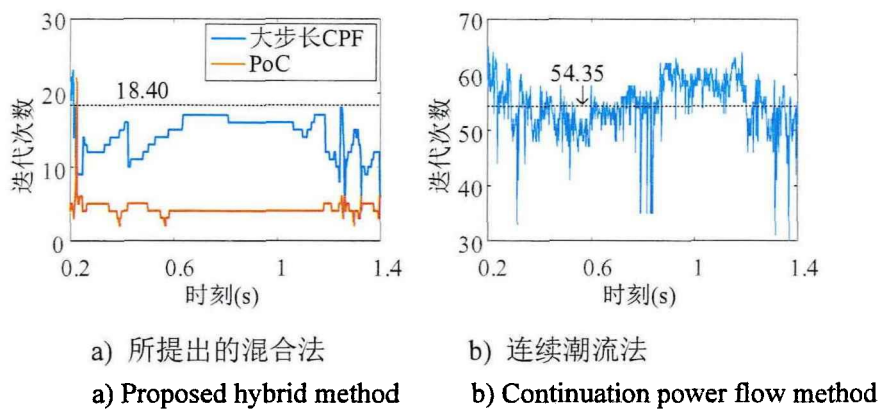


图 3-15 计算量的比较

Fig.3-15 Comparison of calculated quantities

3.6 本章小结

本章提出了一种电压稳定临界点的快速计算方法。该方法具有以下四个特点：

（1）提出了一种线性性质较好的鞍结型分岔点逼近指标，利用该指标随负荷参数 λ 变化的线性变化优势，实现了对潮流解逼近鞍结型分岔点的有效估计。

（2）提出了连续潮流法与鞍结型分岔点计算直接法的切换策略，通过鞍结型分岔点逼近指标的判断，在逼近鞍结型分岔点时从连续潮流法切换到直接法，避免了连续潮流法难以快速准确地计算鞍结型分岔点的问题，同时为直接法提供了较好的计算初值，实现了两种计算方法的高效结合。

（3）提出了一种海森矩阵的隐式计算方法，具有容易实现、计算快的优点，提高了此类直接法的计算效率。在直角坐标系下，潮流方程的海森矩阵为常数矩阵，在本章的基础上可以进一步加速临界点的计算。

（4）将所提混合方法运用于奇异点的计算，为后续章节中的负荷功率裕度指标 L_M 和变流器运行裕度指标 C_M 提供了高效的计算工具。

第 4 章 功角和电压稳定的相互影响及耦合机理分析

4.1 引言

前面两章分别基于功角失稳和电压失稳的特征提出了失稳检测方法，而本章针对电力系统中功角稳定和电压稳定的耦合机理进行探索。选取电力系统中三种典型设备进行研究：同步发电机、电动机和跟网型变流器（Grid-Following Converters）。这三种设备分别体现了功角动态、传统电网中的电压动态和新型电力系统中电压动态的特征。

本章的内容分为以下两个部分：

（1）研究同步发电机与电动机之间的交互机理，重点研究了功角失稳与电动机等值内电导失稳的耦合条件。首先，提出了功角-电压子系统分解模式，基于藏本模型建立了功角子系统模型，基于电动机三阶模型的简化分析建立了电压子系统模型。然后，通过子系统的稳定域对输入参数的变化，分析子模型之间的交互作用。最后，通过刻画两个子系统互联之后的稳定边界，发现功角子系统的不稳定平衡点处存在两种失稳模式高度耦合，拓展了互联系统不稳定平衡点决定失稳类型的传统观点。

（2）深入研究同步发电机与跟网型变流器的交互影响机理。通过同步发电机与锁相环之间的动态交互，分析同步发电机功角与变流器出口电压的耦合作用，重点考虑故障后系统恢复过程中同步发电机与锁相环相互影响引起的稳定问题，而非故障直接引起的失稳情况。首先，建立了同步发电机功角与锁相环的动力学方程，分析了锁相环与同步发电机功角耦合的条件，揭示了大量变流器接入电网时同步发电机功角稳定边界由不稳定平衡点约束转为锁相环约束的机理。然后，基于几何奇异摄动理论，从理论层面解释了锁相环失去平衡点时系统轨迹从同步发电机动态主导过渡到锁相环动态主导的动力学特征。最后，通过发电机转速的解析，分析了锁相环简化为代数方程在功角稳定性分析中的局限性，探讨了同步发电机功角稳定受锁相环制约的条件，为大规模新能源馈入电网的暂态稳定域分析提供了理论支撑。

4.2 同步发电机与动态负荷之间的交互机理分析

为了简化功角/电压耦合失稳机理分析同时保留主要特征，本节针对三节点系统进行两种稳定形态的耦合机理分析。如图 4-1 所示，此系统包含大系统母线 1，发电机母线 2 和关键母线 3。关键母线 3 所连接的设备主要包括静态负荷、动态负荷，以及变流器。其中， $E_1 \angle \delta_1$ 表示等值大系统的电压相量， $E_g \angle \delta_g$ 表示等值发电机的出口处电压或暂态内电势相量， $V_3 \angle \theta_3$ 表示关键母线负荷的电压相量。 E_1 、 E_g 在机

理分析中近似取 1, δ_1 取 0° 。如果考虑到 δ_1 的波动, 只需要将本章中所有的 δ_g 和 θ_3 同时减去 δ_1 即可。在本章的仿真计算中, 大系统采用电压源模型。 $Z_1=R_1+jX_1$ 、 $Z_2=R_2+jX_2$ 和 $Z_3=R_3+jX_3$ 都表示线路等值阻抗。 P_3 和 Q_3 分别表示负荷的有功和无功功率, 或者是变流器设备的有功与无功功率。 I_3 和 ϕ_3 表示变流器注入电流幅值和功率因素角。这样的三节点系统可以看作是通过发电机同调等值、网络等值得到的简化模型, 它同时体现了暂态功角稳定的特征与暂态电压稳定的特征。

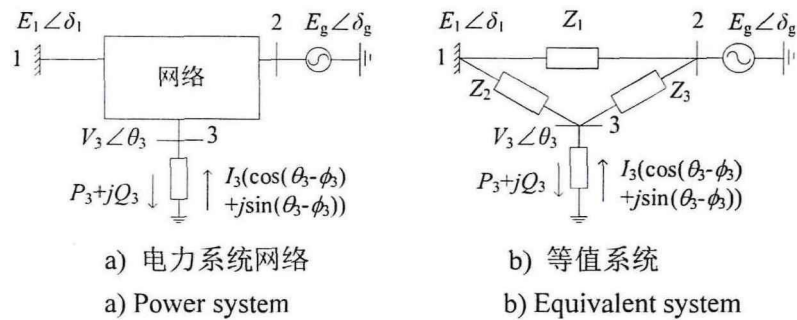


图 4-1 三节点系统

Fig. 4-1 Three-node system

4.2.1 功角子系统与电压子系统建模

在功角稳定问题的分析中, 往往将负荷简化为恒阻抗模型, 此时系统仅存在功角稳定问题, 系统模型也可以简化为藏本模型形式。因此可以将动态负荷的导纳变化看作功角子系统的输入变量, 以反映电压稳定性对功角稳定性的影响。在电压稳定问题的分析中, 往往忽略发电机功角的变化, 因此可以将发电机功角作为电压子系统的输入变量, 以反映功角稳定性对电压稳定性的影响。因此, 电力系统可以划分为功角子系统和电压子系统的反馈连接, 如图 4-2 所示, 体现出发电机和动态负荷交互作用。图中 G_{L0} 、 δ_{g0} 表示互联系统的平衡点。

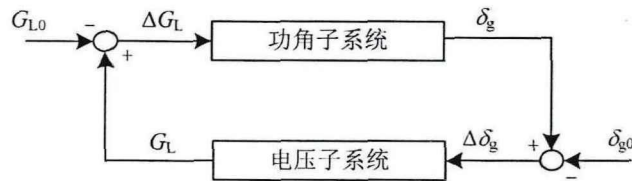


图 4-2 功角子系统与电压子系统的反馈关系

Fig.4-2 Feedback relationship between power angle subsystem and voltage subsystem

4.2.1.1 功角子系统和电压子系统的动态部分建模

功角子系统包含发电机转子运动方程, 如式(4-1)所示, 也是同步稳定研究的基本模型, 与藏本模型^[168]具有相同的形式。

$$\begin{cases} d\delta_g/dt = \omega_0(\omega_g - 1) \\ T_J d\omega_g/dt = P_m - P_g - D_g(\omega_g - 1) \end{cases} \quad (4-1)$$

式中 ω_0 ——工频 50Hz 下的角速度, 等于 100π (rad/s), 有名值;

δ_g ——发电机的功角, 单位是 rad;

T_J ——标么化的发电机惯性时间常数, 单位是秒 (在本章后文中, 如果没有特别说明, 都是标么值, 单位是 p.u.);

P_m 、 P_g 、 D_g ——发电机的机械功率、电磁功率和阻尼系数;

ω_g —— δ_g 的角频率标么值, 稳态下等于 1p.u.。

电压子系统包含动态负荷, 以电动机负荷为例。常用的电动机三阶模型为式(4-2)所示:

$$\begin{cases} T_{J,L} \frac{ds}{dt} = P_{m,L} - P_{e,L} \\ \frac{dE'_x}{dt} = s\omega_0 E'_y - \frac{1}{T'} (E'_x + (X - X')I_y) \\ \frac{dE'_y}{dt} = -s\omega_0 E'_x - \frac{1}{T'} (E'_y - (X - X')I_x) \end{cases} \quad (4-2)$$

式中 s ——转差率;

$T_{J,L}$ 、 T' ——电动机的惯性时间常数、暂态开路时间常数;

X 、 X' ——转子堵转电抗、转子开路电抗;

$P_{m,L}$ 、 $P_{e,L}$ ——电动机的机械功率和电磁功率,

$P_{m,L} = P_{mL0}(A_m(1-s)^2 + (1-A_m))$, $P_{e,L} = E'_x I_x + E'_y I_y$, 其中 P_{mL0} 与 A_m 表示机械负荷参数, 通常 A_m 取 0.85 或 1^[169];

E'_x 、 E'_y ——电动机的内电势在 x 轴和 y 轴上的分量, $E'_x = -r_s I_x + X' I_y + V_x$,

$E'_y = -r_s I_y - X' I_x + V_y$, 其中 r_s 表示转子侧电阻, V_x 、 V_y 表示发电机端电压在 x 轴和 y 轴上的分量。

本文主要研究机械运动的时间尺度, 因此忽略电动机的磁链衰减过程, 令 $dE'_x/dt = 0$, $dE'_y/dt = 0$, 得到式(4-3)和式(4-4)。

$$I_x = \frac{sT'\omega_0}{X - X'} E'_x - \frac{E'_y}{X - X'}, \quad (4-3)$$

$$I_y = \frac{sT'\omega_0}{X - X'} E'_y + \frac{E'_x}{X - X'}. \quad (4-4)$$

因此, 电动机模型可以表示为如下等值电路。该等效电路与常见的电动机 T 型等效电路是等价的。阻抗 $r_s + jX'$ 可以等效到网络的导纳矩阵中, 这样就可以将电

动机看作电导变化而电纳恒定的阻抗型负荷。因为其电纳恒定的特点，与文献[170,171]中的电动机模型相比，该模型更方便分析。此时电压子系统的动态模型为式(4-5)。

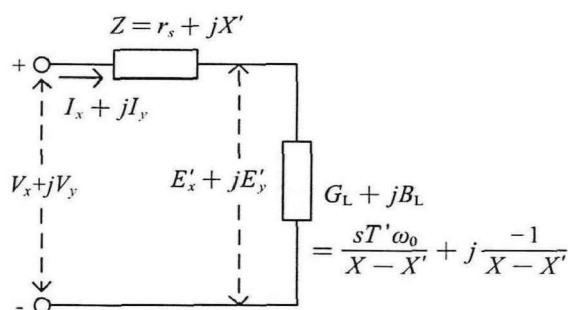


图 4-3 电动机模型等效电路

Fig.4-3 Motor Model Equivalent Circuit

$$T_{J,L2} \frac{dG_L}{dt} = P_{m,L} - P_{e,L} \quad (4-5)$$

其中， $T_{J,L2} = T_{J,L} \frac{X - X'}{T' \omega_0}$ ， $P_{m,L} = P_{mL0} \left(A_m \left(1 - G_L \frac{X - X'}{T' \omega_0} \right)^2 + (1 - A_m) \right)$ ，

$P_{e,L} = ((E'_x)^2 + (E'_y)^2) G_L$ 。由于分母的 ω_0 较大， $T_{J,L2}$ 的数值通常非常小。

4.2.1.2 功角子系统和电压子系统的互联部分建模

将电动机的部分阻抗 $r_s + jX'$ 通过星三角变换等效到图 4-1 b)所示的网络中，得到网络连接如图 4-4 a)所示。图中 Z'_1 、 Z'_2 、 Z'_3 表示变换之后的网络阻抗。基于该网络可以建立功角子系统与其输入量 ΔG_L 的关系，以及电压子系统与其输入量 $\Delta \delta_g$ 的关系，从而得到图 4-2 中所示的功角、电压子系统反馈关系。

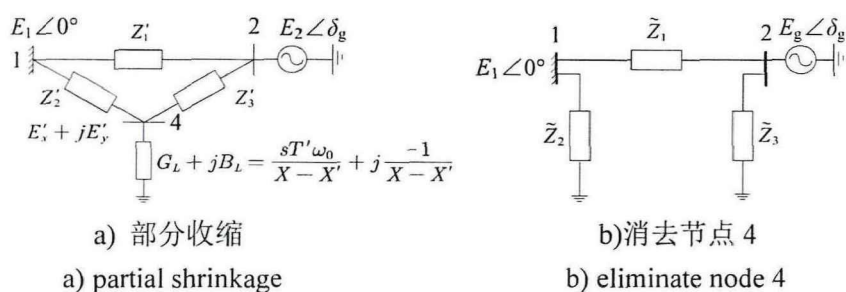


图 4-4 电动机阻抗收缩到网络

Fig.4-4 The impedance of motor shrinks into the network

电压子系统与其输入量 $\Delta \delta_g$ 的关系：根据图 4-4 a)，得到式(4-6)；然后取模值的平方得到(4-7)；最后将式(4-7)代入式(4-5)即得到图 4-2 中电压子系统的表达式。

$$E'_x + jE'_y = \frac{Y'_2 E_1 + Y'_3 E_g e^{j(\delta_{g0} + \Delta \delta_g)}}{Y'_2 + Y'_3 + Y_L} \quad (4-6)$$

式中 Y'_2 、 Y'_3 ——变换后网络阻抗 Z'_2 、 Z'_3 的倒数。

Y_L ——电动机内电势对应的等值阻抗, $Y_L = G_L - j/(X - X')$ 。

$$(E'_x)^2 + (E'_y)^2 = \frac{|Y'_2 E_1|^2 + |Y'_3 E_g|^2 + 2 \operatorname{Re}((Y'_2)^* Y'_3 E_1 E_g e^{j(\delta_{g0} + \Delta\delta_g)})}{|Y'_2 + Y'_3 + Y_L|^2} \quad (4-7)$$

式中 $\operatorname{Re}()$ 表示取复数的实部, $()^*$ 表示复数取共轭。

式(4-7)中, 如果忽略网络的电导和电动机定子侧的电阻, 可以得到电动机转子侧电磁功率的简化表达式(4-8)。将式(4-8)代入式(4-5)得到电压子系统的表达式。

$$P_{e,L}(\delta_g, G_L) = \frac{B_2^2 E_1^2 + B_3^2 E_g^2}{B_{23L}^2 + G_L^2} G_L + \frac{2 B_2 B_3 E_1 E_g G_L}{B_{23L}^2 + G_L^2} \cos(\delta_g) \quad (4-8)$$

式中 B_1 、 B_2 、 B_3 —— Y'_1 、 Y'_2 和 Y'_3 的虚部, 其数值都小于等于 0;

$$B_{23L} = B_2 + B_3 + B_L。$$

功角子系统与其输入量 ΔG_L 的关系: 根据图 4-4 a) 得到其网络方程式(4-9), 消去节点 4 电压后得到网络方程式(4-10), 求出 I_2 , 最后得到发电机电磁功率表达式(4-11)。将式(4-11)代入式(4-1)得到图 4-2 中功角子系统的表达式。

$$\begin{pmatrix} Y'_1 + Y'_2 & -Y'_1 & -Y'_2 \\ -Y'_1 & Y'_1 + Y'_3 & -Y'_3 \\ -Y'_2 & -Y'_3 & Y'_2 + Y'_3 + Y_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 e^{j\delta_1} \\ E_g e^{j\delta_g} \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4-9)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2 & -\tilde{Y}_1 \\ -\tilde{Y}_1 & \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 e^{j\delta_1} \\ E_g e^{j\delta_g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (4-10)$$

$$P_g = \operatorname{Re}(I_2 E_g e^{-j\delta_g}) = \operatorname{Re}(-\tilde{Y}_1 E_g E_1 e^{j(\delta_1 - \delta_g)} + (\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_3) E_g^2) \quad (4-11)$$

式中 $\tilde{Y}_1$ 、 $\tilde{Y}_2$ 、 $\tilde{Y}_3$ ——消去节点 4 后的网络导纳, 图 4-4(b) 中网络阻抗的倒数。注

意到它们是 ΔG_L 的函数; $\tilde{Y}_1 = Y'_1 + Y'_2 Y'_3 / (Y'_2 + Y'_3 + Y_L)$,

$\tilde{Y}_3 = Y'_3 Y_L / (Y'_2 + Y'_3 + Y_L)$; $G_L = G_{L0} + \Delta G_L$;

I_1 、 I_2 、 U_4 ——大系统节点和发电机节点注入网络的电流相量, 节点 4 的电压相量, $U_4 = E'_x + j E'_y$ 。

如果忽略式(4-11)中网络电导和电动机定子侧电导, 可以得到其简化的表达式:

$$P_g(\delta_g, G_L) = \frac{B_3^2 E_g^2 G_L}{B_{23L}^2 + G_L^2} + \frac{B_2 B_3 E_1 E_g G_L}{B_{23L}^2 + G_L^2} \cos(\delta_g) - B_1 E_g E_1 \sin(\delta_g) + \frac{-B_2 B_3 B_{23L} E_1 E_g}{B_{23L}^2 + G_L^2} \sin(\delta_g) \quad (4-12)$$

4.2.2 功角子系统和电压子系统的相互影响机理

根据发电机、网络和负荷在暂态过程中的性质不同,将系统中同步发电机功角和动态负荷电压的相互影响的原因主要分为以下两类:发电机与动态负荷的强交互以及网络传输能力不满足动态负荷需求。

4.2.2.1 发电机与动态负荷的强交互

发电机与动态负荷的交互作用从物理过程上描述为:一方面,故障引起母线电压下跌导致负荷等效电导变大,过大的负荷电导恶化了同步发电机的暂态功角稳定;另一方面,故障造成发电机功角差增大,功角失稳引起临界割集区域的母线电压下跌,最终动态负荷失稳。本小节基于功角-电压子系统分解模式,分别刻画了电压、功角子系统稳定边界。基于子系统的稳定边界,分析了两个子系统之间的相互影响,特别是功角子系统与电压子系统都失稳的条件体现了两者之间的强交互作用。

(1) 同步发电机受动态负荷的影响

在相同初始条件下,功角摆开最大角度受动态负荷的影响呈现非单调的特性。功角子系统中的发电机有功功率式(4-12)可以分解为两部分,如式(4-13)所示。

$$P_g = P_{E1} + P_{E2} \quad (4-13)$$

其中, $P_{E1} = \frac{B_3^2 E_g^2 G_L}{B_{23L}^2 + G_L^2}$, $P_{E2} = \frac{B_2 B_3 E_1 E_g G_L}{B_{23L}^2 + G_L^2} \cos(\delta_g) - \frac{B_2 B_3 B_{23L} E_1 E_g}{B_{23L}^2 + G_L^2} \sin(\delta_g) - B_1 E_g E_1 \sin(\delta_g)$ 。

P_{E1} 和 P_{E2} 分量的作用不同, P_{E1} 分量可以等效为发电机的机械功率,不随发电机功角的变化而变化。定义同步发电机的势能为:

$$V_{PE} = \int_{\delta_g(0)}^{\delta_{\max}} (P_{E1} + P_{E2} - P_m) d\delta_g = V_{PE1} + V_{PE2} \quad (4-14)$$

其中 V_{PE1} 和 V_{PE2} —— $P_{E1}-P_m$ 和 P_{E2} 功率积分得到的势能。

假设功角子系统的初始功角为 $\delta_g(0)$, 初始转速为 $\omega_g(0)$, 当输入为 G_L 时, 已知同步发电机的功角摆开的极值记为 $\delta_{\max}$ 。根据扩展等面积法则, 如果忽略阻尼部分的作用功角摆到最大时加、减速面积相等, 相对动能全部转化为势能。因此, $V_{PE} = T_J (\omega_g(0))^2 / 2$, V_{PE} 由 $\omega_g(0)$ 确定, 当 $\omega_g(0)$ 不变时 V_{PE} 也不变。在相同的 V_{PE} 下比较 $\delta_{\max}$ 与负荷电导 G_L 的灵敏度, 设负荷导纳 $Y_L = G_L + jB_L$, 该条件表示为:

$$\frac{dV_{PE}(\delta_{\max})}{dG_L} = 0 \quad (4-15)$$

由式(4-14)和式(4-15), 解得式(4-16):

$$\frac{d\delta_{\max}}{dG_L} = - \frac{\partial V_{PE1}/\partial G_L + \partial V_{PE2}/\partial G_L}{\partial(V_{PE1} + V_{PE2})/\partial \delta_{\max}} = - \frac{V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda}}{V_{p\delta}} \quad (4-16)$$

其中, 定义一个参数 α_B , $\alpha_B = B_3/B_2$ 。将 $\delta_g(0)$ 简写为 δ_0 , 假设 $E_1 = 1 \text{ p.u.}$;

$$V_{p1\lambda} = E_g^2 \alpha_B B_2 B_3 (B_{23L}^2 - G_L^2) (\delta_{\max} - \delta_0) / V_{p\lambda}^{\text{den}};$$

$$V_{p2\lambda} = V_{p2\lambda}^{\text{num}} / V_{p\lambda}^{\text{den}};$$

$$V_{p\delta} = -B_1 \sin \delta_{\max} + \frac{B_2 B_3 G_L \cos \delta_{\max} - (B_2 B_3 B_{23L}) \sin \delta_{\max} + E_g^2 B_3^2 G_L}{\sqrt{V_{p\lambda}^{\text{den}}}};$$

$$V_{p2\lambda}^{\text{num}} = 2 E_g B_2 B_3 B_{23L} G_L (\cos \delta_0 - \cos \delta_{\max}) + E_g B_2 B_3 (B_{23L}^2 - G_L^2) (\sin \delta_{\max} - \sin \delta_0)$$

$$V_{p\lambda}^{\text{den}} = (G_L^2 + B_{23L}^2)^2.$$

$V_{p1\lambda}$ 和 $V_{p2\lambda}$ 对功角稳定性的影响有所区别。 $V_{p1\lambda} \leq 0$ 表示 G_L 增加导致发电机的等值机械功率 $P_m - P_{E1}$ 增加, 此时负荷导纳 G_L 减小类似于调速器的效应。 $V_{p2\lambda} \leq 0$ 表示负荷导纳 G_L 增加会降低同步发电机与大系统之间的功率传输能力, 类似于减小了同步发电机与大系统之间电气距离的效应。网络参数 B_1 存在于式(4-16)的分母 $V_{p\delta}$ 中, 且因为 $B_1 < 0$ 和平衡点的吸引域内 $V_{p\delta} > 0$, 所以 B_1 的绝对值越大, 式(4-16)的分母绝对值越大, $d\delta_{\max}/d\lambda$ 也就越接近于 0。说明 B_1 这条线路 (这条线路表示等值后同步发电机与大系统之间的直接连接) 的电气距离越短, G_L 的变化对发电机功角稳定性的影响越小。因此, 动态负荷对功角稳定的影响在网络连接不太强的电网中更容易表现出来。

定义 $k_{\lambda}^{(1)}$ 、 $k_{\lambda}^{(2)}$ 和 $\delta_{\alpha}^{(1)}$, 以方便结论的表述。

$$k_{\lambda}^{(1)} = k_G^+ (\cos \delta_{\max} - \cos \delta_0, \delta_{\alpha}^{(1)}), \quad (4-17)$$

$$k_{\lambda}^{(2)} = k_G^- (\cos \delta_{\max} - \cos \delta_0, \delta_{\alpha}^{(1)}), \quad (4-18)$$

其中, 函数 $k_G^+(a, b) = (a + \sqrt{a^2 + b^2})/b$, 函数 $k_G^-(a, b) = (a - \sqrt{a^2 + b^2})/b$,

$$\delta_{\alpha}^{(1)} = E_g \alpha_B (\delta_0 - \delta_{\max}) + \sin \delta_0 - \sin \delta_{\max}.$$

假设 $\delta_{\max} > \delta_0 \geq 0$, 当 $E_g \alpha_B \geq 1$ 时, $\delta_{\alpha}^{(1)} < 0$; 当 $0 < E_g \alpha_B < 1$ 且 δ_0 和 $\delta_{\max}$ 都较大时, $\delta_{\alpha}^{(1)}$ 存在大于 0 的情况。但 $\delta_{\alpha}^{(1)}$ 大于 0 的情况非常少见, 因为 $\delta_{\max}$ 受到稳定域的限制, 增大到一定程度就已经功角失稳。基于 $\delta_{\alpha}^{(1)}$ 的符号分为以下两种情况, 推导过程详见附录 D。

(a) $\delta_{\alpha}^{(1)} < 0$

当 $-B_{23L}/G_L < k_{\lambda}^{(2)}$ 时, $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda} < 0$, $d\delta_{\max}/dG_L > 0$, G_L 增加会使得 $\delta_{\max}$ 增大。当 $-B_{23L}/G_L > k_{\lambda}^{(2)}$ 时, $d\delta_{\max}/dG_L < 0$, G_L 增加会使得 $\delta_{\max}$ 减小。

(b) $\delta_{\alpha}^{(1)} > 0$

当 $-B_{23L}/G_L < k_\lambda^{(1)}$ 时, $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda} > 0$, $d\delta_{\max}/dG_L < 0$, G_L 增加会使得 $\delta_{\max}$ 减小。
 当 $-B_{23L}/G_L > k_\lambda^{(1)}$ 时, $d\delta_{\max}/dG_L > 0$, G_L 增加会使得 $\delta_{\max}$ 增大。

初始条件 δ_0 取 0.5325 rad, $\omega_g(0)$ 取 1.04 p.u. 时, 式(4-13)代入式(4-1)的解曲线如图 4-5 a) 所示, 其系统参数见表 4-1, 在平衡点处 $\delta_{g0}=0.4825$ rad, $\alpha_B=0.6667$, $\pi > \delta_{\max} > \delta_0$ 时 $\delta_\alpha^{(1)} < 0$ 。因此, G_L 对 $\delta_{\max}$ 的影响分为两种情况: (i) 当 G_L 接近 0 时, $-B_{23L}/G_L > k_\lambda^{(2)}$, G_L 增加会使得 $\delta_{\max}$ 减小, 如图 4-5 a) 中从蓝色实线到红色虚线的变化。当 δ_0 、 E_g 和参数 α 确定后, $k_\lambda^{(2)}$ 是 $\delta_{\max}$ 的函数, 其曲线如图 4-5 b) 所示。随着 G_L 增大, $\delta_{\max}$ 减小, $k_\lambda^{(2)}$ 也减小。(ii) 当 G_L 增大到 5p.u. 时, $-B_{23L}/G_L < k_\lambda^{(2)}=1.729$, 此时 G_L 增加使得 $\delta_{\max}$ 增大, 如图 4-5 a) 中红色虚线、黄色虚线和紫色虚线所示。又因为 $k_\lambda^{(2)}$ 随 $\delta_{\max}$ 增大, 所以 $-B_{23L}/G_L < k_\lambda^{(2)}$ 在 $G_L > 5$ 时始终成立。直到当 G_L 增大到 16p.u. 时, 出现功角失稳。

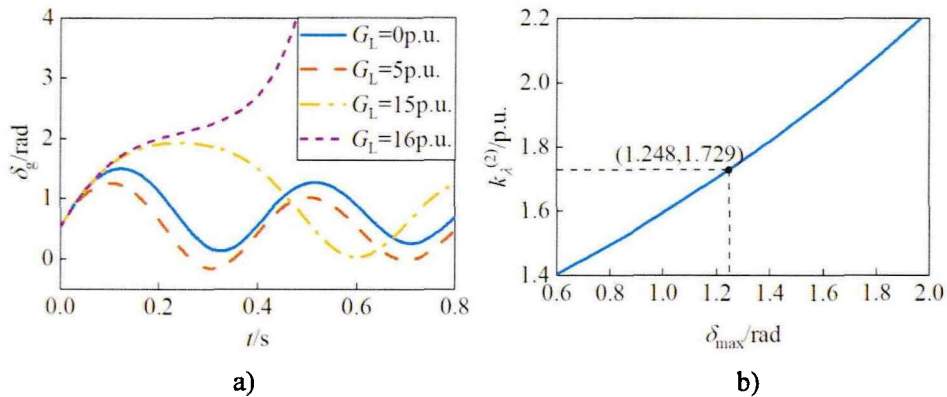


图 4-5 G_L 对功角 δ_g 的影响

Fig.4-5 The influence of G_L on power angle δ_g

表 4-1 系统参数 1 (p.u.)

Table 4-1 System parameter 1 (p.u.)

元件	参数名	值	参数名	值	参数名	值	参数名	值
网络	B_1	-2.4592	B_2	-3.8519	B_3	-2.5679		
发电机	E_2	1.06	T_J	3.4 秒	P_m	2.6	D_g	5
电动机	X_L	1.5281	$T_{J,L}$	3.4 秒	B_L	-0.6982	P_{mL0}	2
	X'_L	0.0958	A_m	0.85	T'	0.894013	X_s	0.0948

同时, G_L 的增加会影响功角子系统的稳定区域, 变化趋势与 $\delta_{\max}$ 的变化相似。如图 4-6 a) 所示, 系统参数见表 4-1, 当初始状态位于图中曲线所围起来的区域时, 功角子系统能够恢复稳定。图中右侧稳定区域随着 G_L 增大单调较小。图中左侧稳定区域表现为先增大后减小的趋势, 当 G_L 较大时, 随着 G_L 增大, 稳定区域也是明显减小。图 4-6 b) 中的功角稳定域变化趋势与图 4-6 a) 中相似, 但变化的幅度较小,

几乎可以忽略不计。这说明在不同的场景下，电压子系统对功角子系统的稳定性影响有大小之分，在第 5 章中会重点对比不同场景下功角电压的耦合强弱。图 4-6 b) 中的系统参数见表 4-2。在平衡点处 $\delta_{g0}=0.3379\text{ rad}$ ， $\alpha_B=0.16$ 。

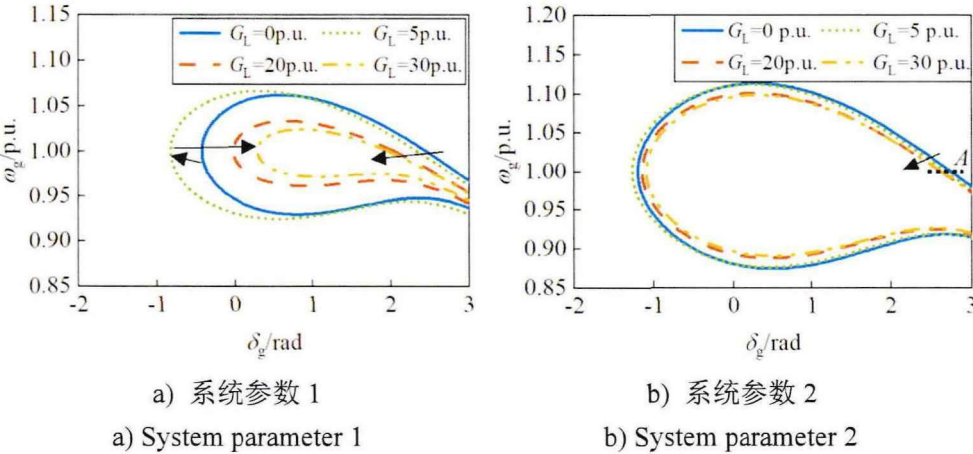


图 4-6 不同 G_L 的功角子系统稳定区域

Fig.4-6 Stability region of power angle subsystems with different G_L

表 4-2 系统参数 2 (p.u.)

Table 4-2 System parameter 2 (p.u.)

元件	参数名	值	参数名	值	参数名	值	参数名	值
网络	B_1	-5.1000	B_2	-8.0248	B_3	-1.2840		
发电机	E_2	1.05	T_J	3.4 秒	P_m	2.47	D_g	5
电动机	X_L	1.0539	$T_{J,L}$	3.4 秒	B_L	-0.6982	P_{mL0}	2.9
	X'_L	0.0660	A_m	0.85	T'	0.894013	X_s	0.0948

(2) 动态负荷受同步发电机的影响

电压子系统输入变量 δ_g 可以从状态变量 G_L 中分离出来，写成如下形式：

$$\frac{dG_L}{dt} = f_L(G_L) + g_L(G_L)(-\cos(\delta_g)) \tag{4-19}$$

其中， $f_L(G_L) = \frac{P_{m,L}}{T_{J,L2}} - \frac{B_2^2 E_1^2 + B_3^2 E_g^2}{T_{J,L2}(B_{23L}^2 + G_L^2)} G_L$ ， $g_L(G_L) = \frac{2B_2 B_3 E_1 E_g G_L}{T_{J,L2}(B_{23L}^2 + G_L^2)} > 0$ 。

方程式(4-19)通常具有多个平衡点，其中 G_L 较小的平衡点为稳定平衡点，记为 G_{L0} ， G_L 较大的平衡点为不稳定平衡点，记为 G_{Lmax} 。按照功角子系统稳定与功角子系统失稳两种情况分析电压子系统的稳定性。

(a) 功角子系统稳定时

当 $G_L < G_{Lmax}$ 且功角子系统稳定时，电动机能够稳定地收敛到 G_{L0} ，其收敛域如图 4-7 a) 中阴影部分所示。随着 $|\delta_g|$ 增大， G_{Lmax} 减小，所以在功角增大的过程中电动机更容易失去稳定。图 4-7 中所采用的系统参数同表 4-2。比较图 4-7 a) 与图 4-6 b)，当 G_L 较大时，受到电压子系统稳定性的限制， δ_g 的稳定范围小于功角子系统的稳

定域。以功角子系统稳定域内、电压子系统稳定边界外且靠近稳定边界为初始点的轨迹属于电压失稳、功角稳定，具体将在本章 4.2.3 节中分析。

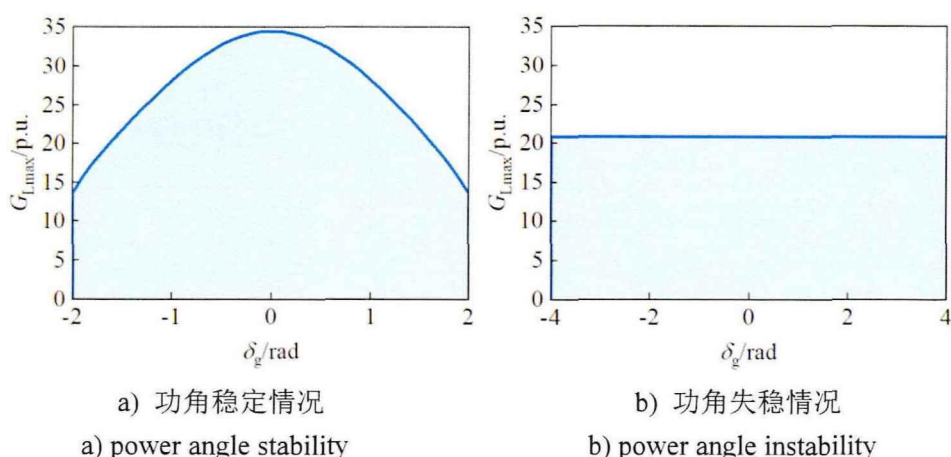


图 4-7 电压子系统的稳定区域

Fig.4-7 Stability region of voltage subsystem

(b) 功角子系统失稳时

假设当功角子系统失去稳定时 δ_g 增大，式(4-19)中的余弦项成为强迫振荡中的驱动力（driving force），如式(4-20)所示。

$$\frac{1}{g_L(G_L)} \frac{dG_L}{dt} = \frac{f_L(G_L)}{g_L(G_L)} - \cos(\delta_0 + \omega_0(\omega_g - 1)t) \quad (4-20)$$

该方程的所对应的自治分量表示为式(4-21)。方程(4-20)的变化趋势也主要由其自治分量所决定。

$$\frac{1}{g_L(G_L)} \frac{dG_L}{dt} = \frac{f_L(G_L)}{g_L(G_L)} \quad (4-21)$$

方程式(4-21)通常也具有多个平衡点，采用与式(4-19)相同的符号，不稳定平衡点记为 G_{Lmax} 。当 $G_L < G_{Lmax}$ 时，电动机的滑差不会增大至堵转，所以将这部分区域称为电动机的稳定区域，如图 4-7 b) 中阴影部分所示。在这个系统参数下， G_{Lmax} 约为 20.83 p.u.。取 $\omega_g = 1.19$ p.u.，初始值 $G_L(0) = 20$ 时， G_L 的时域曲线如图 4-8 a) 所示。图中蓝色线和橙色线的趋势一致，验证了式(4-21)的解是式(4-20)的主要分量。当功角失稳且 $G_L < G_{Lmax}$ 时， G_L 曲线会振荡收敛至当式(4-21)方程的平衡点的附近，并围绕该平衡点等幅振荡。如果将 $G_L(0)$ 初始值增加到 21 p.u.， G_L 出现失稳，如图 4-8 b) 所示，验证了稳定域 $G_L < G_{Lmax}$ 的正确性，该稳定域与功角 δ_g 的数值无关。

在表 4-1 的系统参数下，式(4-21)不存在平衡点。此时如果发电机失稳，随着功角 δ_g 增大，电动机的方程式(4-19)与式(4-21)都将失去平衡点，电动机与同步发电机几乎同时失去稳定。这种现象将是下面所说的与奇异点相关的交互类型。

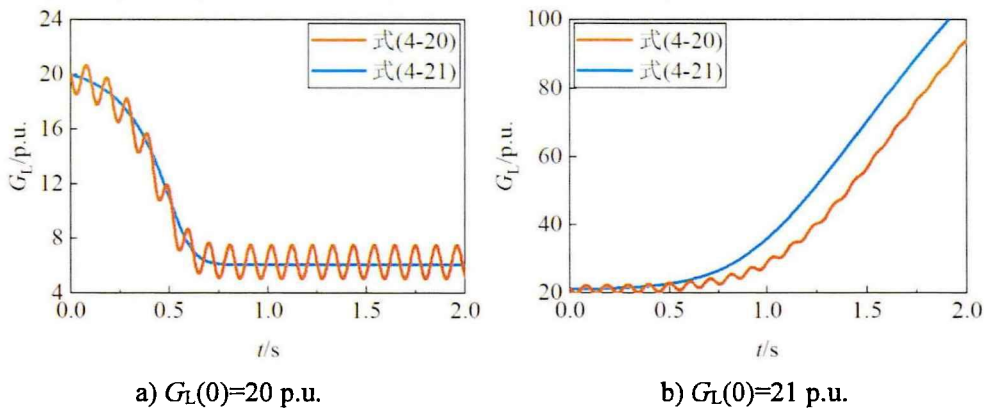


图 4-8 G_L 曲线

Fig.4-8 G_L curve

4.2.2.2 网络传输能力不满足动态负荷需求

发电机的功角 δ_g 增大会恶化网络的功率传输能力，造成电动机的电磁功率 $P_{e,L}$ 减小，如式(4-8)所示。特别是当 $B_2 E_1$ 和 $B_3 E_g$ 接近时，当 δ_g 摆开至 π 时 $P_{e,L}$ 越接近 0，电动机动态方程式容易失去平衡点。此时网络无法维持负荷的功率需求，引起动态负荷失稳，直至电动机堵转，最终可能会导致电压崩溃例。这种电压失稳现象与发电机和负荷之间的强交互现象不同，它对故障的时间长短不敏感，而对电压的下跌程度、发电机的功角摆开的程度敏感^[172]。所以随着故障持续时间的延长，系统常表现出突然从较高的稳定裕度失稳的现象。

这种现象从理论上解释为暂态过程中系统轨迹遇到奇异点，使得式(4-22)的代数方程无实数解^[173]。即使发电机随后回摆，负荷电压可能仍然无法恢复。由于电压子系统方程(4-5)的时间常数 $T_{L,2}$ 远小于功角子系统方程(4-1)的时间常数 T_J ，从电力系统数学模型的角度，在一定条件下可以将电压子系统简化为代数方程。那么功角、电压互联子系统的稳定性可以通过式(4-22)所示的微分代数方程来描述。其中微分方程为功角子系统方程式(4-1)，代数方程为式(4-5)的等号右侧部分等于 0。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ 0 = g(x,y) \end{cases} \quad (4-22)$$

式中 x ——发电机转子角、转速；

y ——节点的电压幅值和相角、电动机内电势的等值电导。

根据第 3 章中奇异点的定义式(3-7)，在奇异点之外，代数变量 y 都可以由状态变量 x 唯一确定，奇异点所包含的区域被称为能量面^[174]。我们通常关心稳态运行点所在的能量面，如果系统的轨迹从一个能量面跳跃到另一个能量面，会因为控制丧失因果性而导致系统不稳定^[146,147,173]。本章 4.3 节讨论的同步发电机与变流器的交互机理分析与这种特性具有相似性。

4.2.3 子系统互联的稳定性分析

上一小节在已知子系统输入的条件下分析了功角子系统与电压子系统的稳定性，总结了各自子系统稳定域随着输入变量变化的规律，得到了同步发电机与动态负荷交互的初步结论。本小节针对同步发电机-动态负荷组成的整体系统，对上述结论进行拓展和修正，完善同步发电机与动态负荷的交互机理。

本章前面已经按照图 4-2 所示的功角、电压子系统反馈连接，建立了功角子系统方程式(4-1)，其中功率表达式为式(4-12)；建立了电压子系统方程式(4-5)，其中功率表示式为式(4-8)。将这两个方程合起来，形成整个系统的方程，这是一个三阶的高度非线性的微分方程，方程的状态变量为 $(\delta_g, \omega_g, G_L)$ 。

4.2.3.1 稳定边界的刻画

根据非线性动力系统的稳定域边界上的性质，稳定边界上不稳定平衡点的稳定流形刻画了稳定边界。本小节通过描述不稳定平衡点的稳定流形来研究功角、电压稳定的耦合性质。以表 4-2 所示系统参数 2 为例进行说明。系统的稳定边界上存在一个不稳定平衡点， $(\delta_g, \omega_g, G_L)=(0.405 \text{ rad}, 1 \text{ p.u.}, 33.36 \text{ p.u.})$ 。在该平衡点处，系统有一个正的特征根，其特征向量的方向几乎平行于 G_L 轴，另外有两个稳定的复数特征根。将该不稳定平衡点的一簇稳定轨迹表示在 $(\delta_g, \omega_g, G_L)$ 构成的三维空间中，如图 4-9 所示，它表示了系统的稳定边界。在图 4-9 中稳定边界曲面所包围的区域内，轨迹都能稳定地收敛到稳定平衡点。

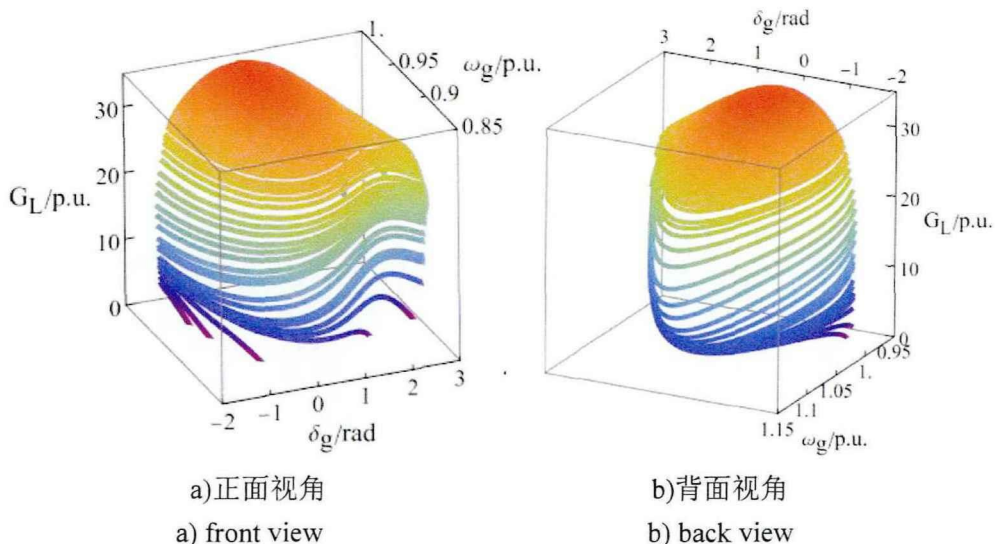


图 4-9 稳定边界上的轨迹簇

Fig. 4-9 cluster of trajectory on stable boundary

该簇稳定边界上的轨迹在 δ_g - ω_g 平面上的投影如图 4-10 a)中蓝色阴影部分所示。其中蓝色实线为图 4-6 b)中 $G_L=5$ 时的稳定边界曲线，两者吻合。该簇稳定边界上的

轨迹在 δ_g - G_L 平面上的投影如图 4-10 b) 中蓝色阴影部分所示, 其中蓝色实线为图 4-7a) 中 G_{Lmax} 曲线, 两者部分吻合, 存在一些差异。左侧部分由于功角稳定的限制, 互联系统的稳定区域在 δ_g - G_L 平面左侧区域的投影小于电压子系统稳定区域。右侧部分由于 $\omega_g < 1$ 时功角回摆, 互联系统的稳定区域在 δ_g - G_L 平面右侧区域的投影大于电压子系统稳定区域。这也说明研究同步发电机功角摆开较大时电动机的稳定性需要考虑功角的动态, 否则会带来误差。

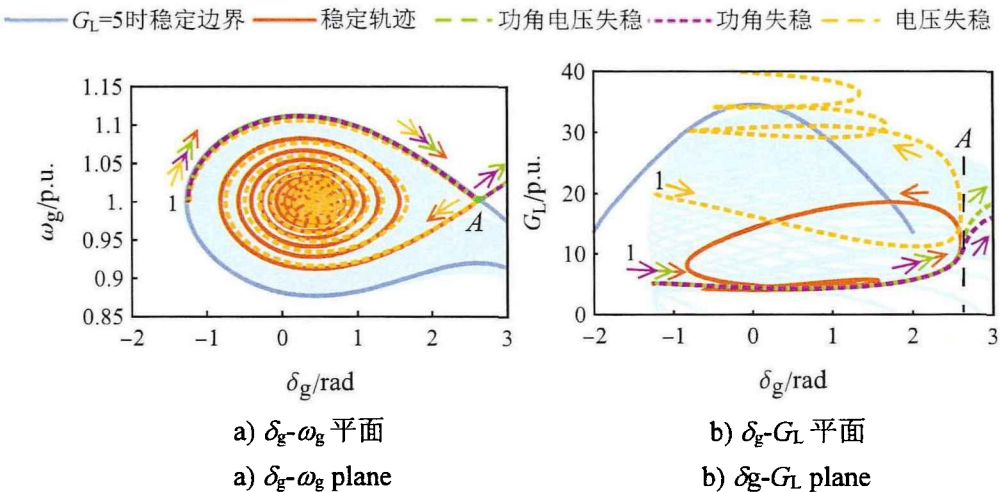


图 4-10 稳定边界与轨迹的投影

Fig. 4-10 Projection of Stable Boundary and Trajectory

4.2.3.2 稳定边界的性质

以左侧稳定边界作为系统初始值为例, 说明互联系统稳定边界的性质。当扰动后的初始值 $\delta_g(0)=-1.250$ rad、 $\omega_g(0)=1$ 、 $G_L(0)=5$ 时, 系统轨迹能够收敛到稳定平衡点 $(\delta_g, \omega_g, G_L)=(0.338, 1, 4.006)$, 如图 4-10 中的橙色曲线和图 4-11 中的橙色曲线所示。当轨迹初始值略微外移, $\delta_g(0)=-1.251$ rad 时, 同步发电机和电动机同时失稳, 如图 4-10 中绿色虚线和图 4-11 中绿色曲线所示。如果轨迹初始值继续外移, $\delta_g(0)=-1.252$ rad 时, 同步发电机失稳, 电动机稳定, 如图 4-10 中紫色虚线和图 4-11 中紫色曲线所示。三种初始条件下, 轨迹在初始部分几乎重合, 起始位置在图中箭头 1 所在处。根据图 4-10 b), 三条轨线在虚线 A 所示的 $\delta_g=2.67$ rad 处分离, 对应图 4-10 a) 中绿点 A 的位置, 也正是功角子系统中不稳定平衡点 A 的位置, 在不同的 G_L 条件下会有所偏移, 如所图 4-6 b) 中黑色虚线 A 与稳定边界的交点所示。虽然绿点 A 不是互联系统的不稳定平衡点, 但 A 点附近的稳定曲线与失稳曲线在这个位置附近分离, 与功角子系统中稳定边界的轨迹特征具有相似性。这里的 A 点相似于动态鞍点(DSP, Dynamic Saddle Point) [175]。

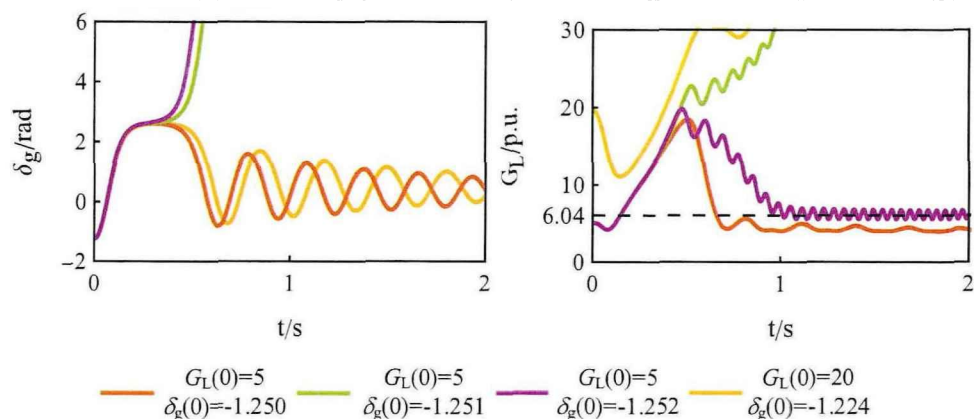


图 4-11 稳定轨迹与失稳轨迹的时域曲线

Fig. 4-11 Time domain curves of stable and unstable trajectories

在图 4-9 所示的稳定边界所包围的区域之外，轨迹不能收敛到稳定平衡点。在图 4-9 所示稳定边界面的上方且靠近稳定边界面，即 (δ_g, ω_g) 坐标位于功角子系统的稳定域内而 G_L 坐标在稳定边界域之外，轨迹将趋于功角稳定而电动机失稳。如图 4-10 中黄色虚线和图 4-11 中黄色曲线所示，初始点 $(\delta_g(0), \omega_g(0))$ 紧靠功角稳定边界的内部， $G_L(0)$ 略大于稳定边界；轨迹在 δ_g - ω_g 平面上的投影振荡地收敛，而坐标 G_L 失去稳定。这是因为互联系统的不稳定平衡点 $(0.405, 1, 33.36)$ 是一个鞍-焦点(saddle-focus)，其正特征根的特征向量几乎平行于 G_L 轴。基于能量函数法的理论这是一个电压稳定模式的不稳定平衡点^[116]，但图 4-10、图 4-11 中的例子说明功角、电压稳定的耦合模式仍然存在，下面进一步分析其原因。

在图 4-9 所示的稳定边界所包围的区域之外，如果功角失稳，电动机在一定条件下能够保持稳定，如图 4-11 所示。假设在 $\delta_g > \delta_g(0)$ 时 $\omega_g > 1$ ，因此 $d\delta_g/dt > 0$ 。那么系统方程就可以将 δ_g 看作自变量，系统方程从三阶自治系统降阶为二阶非自治系统。改写成如下形式：

$$\begin{cases} \frac{d\omega_g}{d\delta_g} = \frac{f_g(G_L) - D_g(\omega_g - 1)}{T_J \omega_0 (\omega_g - 1)} + \frac{g_g(\delta_g, G_L)}{T_J \omega_0 (\omega_g - 1)} \\ \frac{dG_L}{d\delta_g} = \frac{f_L(G_L)}{T_{J,L2} \omega_0 (\omega_g - 1)} + \frac{g_L(G_L) (-\cos(\delta_g))}{T_{J,L2} \omega_0 (\omega_g - 1)} \end{cases} \quad (4-23)$$

其中， $f_L(G_L)$ 和 $g_L(G_L)$ 如式(4-19)中所示， $f_g(G_L) = P_m - \frac{B_3^2 E_g^2 G_L}{B_{23L}^2 + G_L^2}$ ，

$$g_g(\delta_g, G_L) = -\frac{B_2 B_3 E_1 E_g G_L}{B_{23L}^2 + G_L^2} \cos(\delta_g) + B_1 E_g E_1 \sin(\delta_g) + \frac{B_2 B_3 B_{23L} E_1 E_g}{B_{23L}^2 + G_L^2} \sin(\delta_g)。$$

与电压子系统分析类似， $g_g(\delta_g, G_L)$ 与 $g_L(G_L)\cos(\delta_g)$ 都是有界的，表示 δ_g 增大引入的振荡信号，类似于强迫振荡中的驱动力(driving force)。从方程(4-1)中可以得到 ω_g 有界：由于 $P_g(\delta_g, G_L)$ 有界，记为 $|P_m - P_g(\delta_g, G_L)| < k_{Pg}$ ，当 ω_g 大于 $k_{Pg}/D_g + 1$ 时，

根据方程(4-1), $d\omega_g/dt$ 小于 0; 当 ω_g 小于 $-k_{Pg}/D_g+1$ 时, 根据方程(4-1), $d\omega_g/dt$ 大于 0。因此, 如果初始条件 $|\omega_g(0)-1| < k_{Pg}/D_g$, 那么 ω_g 始终满足 $|\omega_g-1| < k_{Pg}/D_g$, 因此 ω_g 有界。由于 ω_g 有界, 式(4-23)中等号右侧项不会在平衡点之外趋于 0, 式(4-23)可以近似的看作自治分量与振荡分量的叠加, 自治分量的方程如式(4-24)所示。

$$\begin{cases} \frac{d\omega_g}{d\delta_g} = \frac{f_g(G_L) - D_g(\omega_g - 1)}{T_J \omega_0 (\omega_g - 1)} \\ \frac{dG_L}{d\delta_g} = \frac{f_L(G_L)}{T_{J,L2} \omega_0 (\omega_g - 1)} \end{cases} \quad (4-24)$$

针对系统参数 2, 式(4-24)存在两个平衡点, 稳定平衡点 $(\omega_g, G_L) = (0.479, 6.04)$ 和不稳定平衡点 $(\omega_g, G_L) = (0.480, 20.83)$, 所以图 4-11 中同步发电机失稳而电动机稳定的紫色曲线, G_L 在 0.604 p.u. 处小范围振荡。同电压子系统分析结论一样, 当扰动后的初始值 $G_L(0)$ 或者在动态过程中 G_L 超过方程(4-24)的不稳定平衡点时, 电动机也会随着功角失稳而失去稳定。如图 4-11 b) 中绿色曲线所示, G_L 曲线的第一个尖峰超过了 20.83 p.u., 随后 G_L 就失去了稳定。与图 4-11 中的紫色曲线相比, 绿色曲线的功角失稳更慢, G_L 的峰值更高。

针对系统参数 1, 稳定边界与图 4-9 和图 4-10 相似, 但式(4-24)不存在平衡点, 式(4-23)中的 ω_g, G_L 随着 δ_g 的增大而增加。表现为功角失稳的同时电压也失去稳定, 不存在上面所讨论的同步发电机失稳而电动机稳定的情况。

综上所述, 同步发电机和电动机负荷的互联系统稳定边界附近存在以下性质:

(1) 稳定边界为二维曲面, 其与 $G_L=0$ 所构成的封闭区域内的轨迹能够收敛至稳定平衡点。互联系统的稳定边界与功角、电压子系统的稳定边界具有相似的性质, 但功角较大部分的电压稳定区域差异较为明显。

(2) 在功角子系统的不稳定平衡点处, 即图 4-10a) 中的 A 点和图 4-10b) 中 A 线附近, 存在功角、电压的复杂交互作用。功角稳定且电压失稳, 功角失稳且电压稳定, 以及功角/电压同时失稳都能在这个区域附近表现出来。

(3) 靠近稳定边界外且功角子系统稳定域内的轨迹, 功角稳定而电压失稳。

(4) 如果功角失稳时, G_L 小于式(4-24)的不稳定平衡点, 功角失稳而电压稳定。

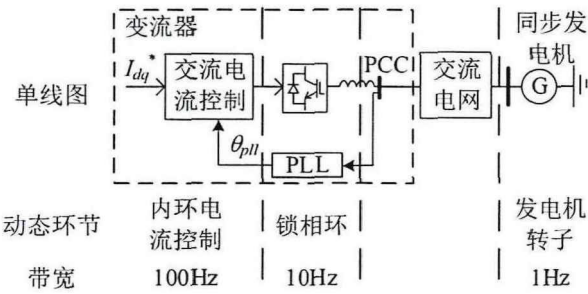
(5) 如果功角失稳时, G_L 大于式(4-24)的不稳定平衡点或者式(4-24)不存在不稳定平衡点, 功角电压同时失稳。前者属于功角电压的强交互作用使得 G_L 在其动态过程中越过式(4-24)的不稳定平衡点, 如图 4-11 中绿色曲线; 后者属于网络传输能力不满足动态负荷需求。

4.3 同步发电机与变流器之间的交互机理分析

4.3.1 锁相环与发电机功角动态交互场景描述

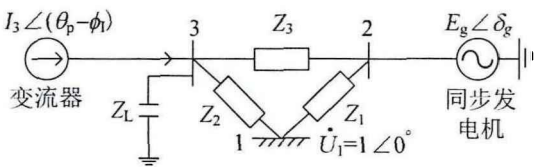
目前，电压源型变流器是一种常见的新能源并网设备，其中已被广泛使用的跟网型变流器依靠锁相环与电网保持同步^[176]。锁相环采取变流器出口处电压作为控制输入，暂态过程中变流器出口电压与发电机功角的耦合体现在锁相环与同步发电机之间的交互。

系统中的电力电子接口控制环节与同步发电机的转子运动具有明显的时间尺度差异。如图 4-12 a) 所示，内环电流控制的带宽在 100Hz 及以上，锁相环控制的带宽一般在 10Hz 与 70Hz 之间，而发电机转子的惯性时间常数通常在秒级。因此，按照不同时间尺度对系统的动态过程进行划分，能够简化分析过程。图中： I_{dq}^* 为变流器的电流指令值，在文中用 I_d 和 I_q 表示； θ_{pll} 为锁相环的输出角； Z_1 、 Z_2 、 Z_3 为网络阻抗； Z_L 为 PCC 处并联阻抗； $\dot{U}_1$ 为大系统母线的电压相量； E_g 和 δ_g 分别为发电机内电势幅值和功角。当研究锁相环的同步稳定性时，目前的研究忽略了同步发电机转子的动态变化，认为同步发电机转子的相位不发生变化。当研究同步发电机的功角稳定性时，假设锁相环在合理的控制参数下能够始终保持同步，此时变流器表现出来外环功率控制或低压穿越控制的特性。



a) 时间尺度划分

a) time scale division of converter



b) 简化系统电路图

b) Simplified system circuit diagram

图 4-12 变流器接入交流系统示意图

Fig. 4-12 Schematic diagram of converter connected to AC system

然而，当故障持续时间较长导致发电机的功角摆开较大时，临界割集区域的母线电压大幅下降，进一步可能会导致其所连接的变流器的锁相环因失去平衡点而失

去同步。此时锁相环失稳主要受发电机的功角而不是锁相环的控制参数的影响。与此同时，锁相环失去稳定之后，变流器输出的功率出现振荡，也会影响同步发电机功角的恢复过程。因此，在含电压源型变流器的电网中，同步发电机的功角稳定性可能受到锁相环的制约^[91]。

锁相环对发电机功角稳定域的约束条件与传统电力系统中恒功率性质的负荷（例如电动机）对同步发电机的功角稳定域的约束条件，具有一定的相似性。因为两者都是通过影响交流网络的功率传输能力，间接地改变发电机的功角稳定性^[13,174]。但由于存在前面所描述的电气量的时间尺度差异，两者表现出不同的现象。

简言之，变流器平衡点存在的条件，影响了同步发电机功角稳定域的边界条件。这既是锁相环动态与发电机功角之间多时间尺度特性的表现，也是锁相环通过交流网络与同步发电机耦合的特征。

4.3.2 同步发电机-变流器系统的动力学行为

4.3.2.1 锁相环与发电机功角的双时间尺度建模

发电机的简化二阶方程如式(4-1)所示。对于变流器和同步发电机，本章为突出机理描述，有以下假设：（1）忽略电流内环控制，假设电流内环控制的带宽足够大，使得内环控制与锁相环近似解耦^[177]；（2）忽略外环控制和直流电压控制，假设严重故障及故障后恢复期间外环控制达到限幅或者故障穿越控制启动^[91,93-96,178-180]，变流器表现出电流源的特性；（3）同步发电机暂态电抗后的内电势恒定。

根据三相同步坐标系的锁相环(Synchronous Reference Frame Phase-Locked Loop, SRF-PLL)的控制框图，如图 4-13，建立锁相环状态方程如式(4-25)所示：

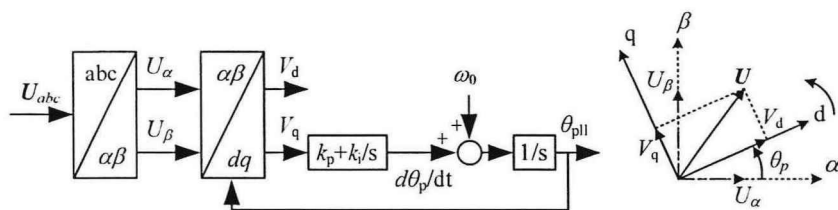


图 4-13 SRF-PLL 的控制框图及 dq 坐标轴与 $\alpha\beta$ 坐标轴的关系

Fig.4-13 Control block diagram of SRF-PLL and the relationship between dq coordinate axis and $\alpha\beta$ coordinate axis

$$\begin{cases} d\theta_p/dt = k_p V_q + k_i x_p = \omega_0(\omega_p - 1) \\ dx_p/dt = V_q \end{cases} \quad (4-25)$$

式中 θ_p ——锁相环的直接输出角度 θ_{pll} 与平衡节点的相角差，是一个相对角，单位是 rad，有名值，假设平衡节点相角的转速等于 ω_0 ；

x_p ——锁相环 PI 控制器中积分的输出值；

V_q ——公共连接点(Point of Common Coupling, PCC)电压相量在 q 轴上的分量;

ω_p ——角频率标么值, 稳态下等于 1 p.u.;

k_p 、 k_i ——PI 参数, 单位分别为 p.u./s 与 p.u./s²。

本章通过如图 4-12 b)所示的简化系统来进行机理研究, 将图 4-12 a)中交流电网用一个含等值大系统的三节点网络代替。其中, 等值大系统的端电压相角为 0°, 同步发电机和变流器分别代表发电机的一个集合与变流器的一个集合^[84,181]。在风机的稳定性研究中也常常使用单台等值风机代替整个风场以简化研究^[182]。

图 4-12 b)拓扑的网络方程如下所示:

$$\begin{cases} (Y_1 + Y_3)U_2 - Y_3U_3 - Y_1U_1 = I_2 e^{j\phi} \\ -Y_3U_2 + (Y_2 + Y_3 + Y_L)U_3 - Y_2U_1 = I_3 e^{j(\theta_3 - \phi)} \end{cases} \quad (4-26)$$

式中: Y_1 、 Y_2 、 Y_3 ——表示网络阻抗 Z_1 , Z_2 , Z_3 的导纳。同步发电机暂态电抗已归算到网络阻抗和网络导纳中;

U_1 、 U_2 、 U_3 ——电压相量, U_1 表示大系统母线的电压相量, $U_1=1 \angle 0^\circ$; E_g 与

δ_g 分别表示发电机内电势幅值和功角, $U_2=E_g \angle \delta_g$; $U_3=V_3 \angle \theta_3=U_{3\alpha}+jU_{3\beta}$;

I_3 与 ϕ —— I_d-jI_q 幅值和相角, $\phi=\arctan(-I_q/I_d)$;

ϕ_g ——发电机节点的注入电流的相位。

根据式(4-26)中的第二个式子, 可以解出 $U_{3\alpha}$ 与 $U_{3\beta}$, 它们都是 θ_p 与 δ_g 的函数。再将 $U_{3\alpha}$ 与 $U_{3\beta}$ 代入式(4-26)中的第一个式子, 得到 $I_2 \angle \phi_g$ 的表达式, 因此 I_2 和 ϕ_g 同样都是 θ_p 与 δ_g 的函数。 V_q 与 P_g 根据网络方程得到表达式:

$$V_q = V_3 \sin(\theta_3 - \theta_p) = U_{3\beta} \cos \theta_p - U_{3\alpha} \sin \theta_p \quad (4-27)$$

$$P_g = U_2 I_2 \cos(\delta_g - \phi_g) \quad (4-28)$$

P_g 和 V_q 可以写成 θ_p 和 δ_g 的函数, 将式(4-27)和式(4-28)代入式(4-1)和式(4-25)即得到系统的状态方程。假设锁相环的响应速度远快于发电机转子的响应速度, 系统具有双时间尺度特性。通过引入无量纲参数 $\varepsilon = 1/(k_p T_I)$ 和坐标变换可以将系统的状态方程改写成如下所示的奇异摄动的形式, 如式(4-29)所示, 式中忽略了频率变化对线路阻抗参数的影响。

$$\begin{cases} d\delta_g/d\lambda = \omega_0(\omega_g - 1)T_I \\ d\omega_g/d\lambda = P_m - P_g(\theta_p, \delta_g) - D_g(\omega_g - 1) \\ \varepsilon d\theta_p/d\lambda = V_q(\theta_p, \delta_g) + (k_i/k_p^2)y_p \\ \varepsilon dy_p/d\lambda = V_q(\theta_p, \delta_g) \end{cases} \quad (4-29)$$

式中 y_p ——锁相环 PI 控制器中积分的输出值 x_p 与 k_p 的乘积, $y_p=x_p k_p$;

λ ——时间变量, $\lambda=t/T_I$ 。

基于奇异摄动理论^[183], 原模型解耦为一个关于发电机转子动态的慢系统式(4-30)与一个关于锁相环动态的快系统式(4-31)。

$$\begin{cases} d\delta_g/dt = \omega_0(\omega_g - 1) \\ T_J d\omega_g/dt = P_m - P_g(\theta_p, \delta_g) - D_g(\omega_g - 1) \\ 0 = V_q(\theta_p, \delta_g) \end{cases} \quad (4-30)$$

$$\begin{cases} d\delta_g/d\lambda = 0 \\ d\omega_g/d\lambda = 0 \\ d\theta_p/d\lambda = V_q(\theta_p, \delta_g) + (k_i/k_p^2)y_p \\ dy_p/d\lambda = V_q(\theta_p, \delta_g) \end{cases} \quad (4-31)$$

注意到快系统(4-31)的平衡点也是慢系统(4-30)中代数方程 $V_q=0$ 的解。因此在快系统(4-31)稳定的情况下, 系统方程(4-31)的轨迹会很快地趋近 $V_q=0$ 的解, 如图 4-14 所示。轨迹越过奇异点之前, 系统轨迹先快速地逼近方程 $V_q=0$ 的解, 然后在该解附近运动, 这些点集 $S_a=\{(\theta_p, \delta_g) | \partial V_q(\theta_p, \delta_g)/\partial \theta_p < 0, V_q(\theta_p, \delta_g)=0\}$ 的快动态过程是渐近稳定的。图中蓝色线表示轨迹, 深蓝色点表示平衡点, 紫色虚线表示 $V_q=0$ 的解。图 4-14 b) 与图 4-14 a) 相比, ε 取值越小, 其轨迹更快的收敛至 $V_q=0$ 的解。

此时, 慢系统(4-30)与快系统(4-31)可以近似解耦, 慢系统(4-30)能够描述同步发电机的暂态功角稳定性, 与传统交流电网的功角稳定性没有本质上的区别。

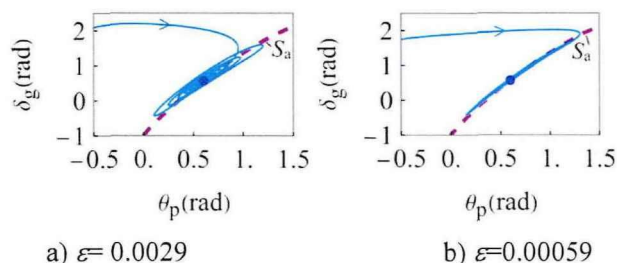


图 4-14 在 θ_p - δ_g 平面上的故障切除后轨迹投影

Fig. 4-14 The trajectory projection after fault on the θ_p - δ_g plane

4.3.2.2 锁相环与发电机功角耦合条件的分析

(1) 快系统的稳定条件

快系统(4-31)在扰动后能够恢复稳定需要两个条件: (1) 快系统存在稳定的平衡点; (2) 故障切除后轨迹位于快系统的稳定域内。

对于第二个稳定条件, 已有文献分析锁相环的稳定域^[184]。因为功角的变化速度显著慢于锁相环的调节速度, 且功角较小时锁相环平衡点距离稳定边界有一定的稳定裕度, 功角增大造成的锁相环收敛域减小难以造成锁相环失稳。也就是说, 在合适的锁相环参数下, 如果故障切除后锁相环能够很快恢复稳定, 那么锁相环可以跟踪上发电机的功角变化。

对于快系统(4-31)的第一个稳定条件, 虽然已有文献分析锁相环平衡点的存在性条件, 但本章着重推导锁相环平衡点存在性与同步发电机功角的关系。

如果忽略线路电导和并联电导, $G_1=0$, $G_2=0$, $G_3=0$, $G_L=0$, 式(4-27)与(4-28)中 V_q 与 P_g 可以展开为式(4-32)与(4-33):

$$V_q = \frac{I_3 \cos(\phi_1) - B_3 E_g \sin(\delta_g - \theta_p) + B_2 \sin(\theta_p)}{-B_2 - B_3 - B_L} \quad (4-32)$$

$$P_g = b_1 \sin(\delta_g) - E_g B_3 I_3 \{ \cos(\phi_1 + \delta_g) \cos(\theta_p) + \sin(\phi_1 + \delta_g) \sin(\theta_p) \} / (B_2 + B_3 + B_L) \quad (4-33)$$

式中: I_3 ——变流器输出电流的幅值;

E_g ——发电机的内电势;

b_1 ——正弦分量的系数, $b_1 = \frac{(B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3 + B_1 B_L) E_g}{-B_2 - B_3 - B_L}$ 。

基于 V_q 表达式(4-32), $V_q=0$ 等价于式(4-34)。

$$\begin{aligned} I_3 \cos(\phi_1) &= B_3 E_g \sin(\delta_g - \theta_p) - B_2 \sin(\theta_p) \\ &= a_\delta(\delta_g) \cdot \sin(\theta_p - \varphi_\delta(\delta_g)) \end{aligned} \quad (4-34)$$

其中, $a_\delta(\delta_g) = \sqrt{B_2^2 + B_3^2 E_g^2 + 2 B_2 B_3 E_g \cos(\delta_g)}$,

$$\varphi_\delta(\delta_g) = \arctan\left(\frac{B_3 E_g \sin(\delta_g)}{B_3 E_g \cos(\delta_g) + B_2}\right)。$$

由于 $a_\delta(\delta_g)$ 最小值在 $\delta_g=\pi$ 处取得, 当 $a_\delta(\pi) < I_3 \cos(\phi_1)$ 时, 发电机功角增大到 π 的过程中就会使得代数方程 $V_q=0$ 失去平衡点。此时, 发电机功角增大会使得快系统(4-31)的第一个稳定条件不能满足。从网络结构上表现为, B_2 与 $B_3 E_g$ 越接近, 锁相环越容易失去平衡点; 从变流器容量上表现为, 变流器输出电流越大, 锁相环越容易失去平衡点。

当发电机功角增大, 代数方程 $V_q=0$ 刚好失去平衡点时, 将这点记作奇异点 $F^{[13]}$, 也被称为鞍结型分岔点和折点(Fold point)^[185]。此时, 子系统(4-30)无法描述交直流电网的同步稳定性, 锁相环与同步发电机的动态过程耦合, 锁相环的动态过程就不能完全被忽略。第 4.3.3 节和 4.3.4 节详细分析这种条件下两者的交互过程。

功角稳定边界的评估大多基于不稳定平衡点处的减速面积、暂态能量或者其稳定流形。当同步发电机功角在扰动后首先经过不稳定平衡点而不是折点, 基于不稳定平衡点的功角稳定性评估方法仍然适用。但是当同步发电机功角增大过程中先经过折点时, 那么折点将会影响功角稳定域的边界。

此小节基于发电机电磁功率 P_g 的解析表达式, 分析了同步发电机不稳定平衡点与折点的位置关系, 以及同步发电机机械功率 P_m 和变流器电流大小 I_3 对这种位置关系的影响, 揭示了折点影响功角稳定边界的一些运行条件。

为了分析 P_g 与 θ_p 的关系, 在 P_g 的表达式中消去变量 θ_p 。首先, 由式(4-34)得到锁相环平衡点的三角函数表达式(4-36)和(4-36):

$$\cos(\theta_p) = -c_1 \sin(\varphi_\delta) + c_2 \cos(\varphi_\delta) \quad (4-35)$$

$$\sin(\theta_p) = c_2 \sin(\varphi_\delta) + c_1 \cos(\varphi_\delta) \quad (4-36)$$

其中, $c_1 = I_3 \cos(\phi_1) / a_\delta(\delta_g)$, $c_2 = \sqrt{a_\delta^2(\delta_g) - (I_3 \cos(\phi_1))^2} / a_\delta(\delta_g)$, $\theta_p - \varphi_\delta \in [-\pi/2, \pi/2]$ 。 $\partial V_q / \partial \theta_p$ 表达式(4-37)由式(4-32)得到, 式中 $a_\delta(\delta_g) > 0$, $(B_2 + B_3 + B_L) < 0$, 所以在式(4-36)的角度范围内 $\partial V_q / \partial \theta_p < 0$ 。

$$\frac{\partial V_q}{\partial \theta_p} = \frac{a_\delta(\delta_g)}{B_2 + B_3 + B_L} \cdot \cos(\theta_p - \varphi_\delta(\delta_g)) \quad (4-37)$$

将式(4-36)代入文中式(4-33), 得到消去变量 θ_p 的 P_g 表达式式(4-38)。对文中式(4-31)的雅克比矩阵求特征值得当 $\partial V_q / \partial \theta_p < 0$ 时, 平衡点稳定。因此所求解皆为锁相环稳定分支内的解。

$$P_g = b_1 \sin(\delta_g) + P_{g2}(\delta_g) \quad (4-38)$$

其中,

$$P_{g2}(\delta_g) = \frac{b_3}{b_2(\delta_g)} + \frac{b_4}{b_2(\delta_g)} \cos(\delta_g) + \frac{b_5}{b_2(\delta_g)} \sin(\delta_g) + \frac{b_6(\delta_g)}{b_2(\delta_g)} \sqrt{a_\delta^2(\delta_g) - I_3^2 \cos^2(\phi_1)},$$

$$b_2(\delta_g) = 2(B_2 + B_3 + B_L) a_\delta^2(\delta_g), \quad b_3 = B_3 I_3^2 E_g^2 \sin(2\phi_1), \quad b_4 = B_2 B_3 I_3^2 E_g \sin(2\phi_1),$$

$$b_5 = B_2 B_3 I_3^2 E_g (1 + \cos(2\phi_1)), \quad b_6(\delta_g) = 2B_3 I_3 E_g (B_3 E_g \cos(\phi_1) + B_2 \cos(\phi_1 + \delta_g))。$$

在 δ_g 取值范围内, $P_{g2}(\delta_g)$ 变化较小, 可以简化为常数。因此, 锁相环保持在其稳定平衡点的情况下, P_g 关于 δ_g 变化的曲线可以更简洁的表示为:

$$P_g \approx b_1 \sin(\delta_g) + P_{g2}(0) \quad (4-39)$$

$$\text{其中, } P_{g2}(0) = \frac{B_3 E_g I_3 \cos(\phi_1) \sqrt{a_\delta^2(0) - I_3^2 \cos^2(\phi_1)}}{(B_2 + B_3 + B_L)(B_2 + B_3 E_g)}。$$

δ_g 取值范围分两种情况:

- (1) 当 $a_\delta(\pi) \geq I_3 \cos(\phi_1)$ 时, δ_g 的取值范围为实数域, 这种情况不存在奇异点;
- (2) 当 $a_\delta(\pi) < I_3 \cos(\phi_1)$ 时, δ_g 的取值范围为 $[-\delta_{g,m}, \delta_{g,m}]$, 取值范围的两端为奇异点的位置, $\delta_{g,m}$ 的表达式如下:

$$\delta_{g,m} = \arccos\left(\frac{I_3^2 \cos^2(\phi_1) - B_2^2 - B_3^2 V_2^2}{2B_2 B_3 E_g}\right)。$$

在 δ_g 取值范围的第二种情况中, 奇异点和不稳定平衡点的相对位置受变流器输出电流 I_3 与同步发电机机械功率 P_m 影响。由式(4-39)可知, $P_g - \delta_g$ 曲线接近正弦函数。 $P_g = P_m > 0$ 的解中功角较小的解称为稳定平衡点, 其它解称为不稳定平衡点。由 δ_g 的取值范围可知, I_3 越大 δ_g 取值范围越小。因此 I_3 增大可以使得在 δ_g 的取值范围

之内只存在稳定平衡点，不稳定平衡点在功角 δ_g 的取值范围之外。同时较小的 P_m 也会使得不稳定平衡点在 δ_g 的取值范围之外。

以表 4-3 的网络参数 1 为例验证上述分析。同步发电机等值内阻抗 0.05 p.u.，内电势 $E_g=1.1$ p.u.，电磁功率曲线如图 4-15 所示。结果表明式(4-39)能够很好的近似式(4-38)，验证了利用式(4-39)研究 P_g 性质的正确性。比较图 4-15 中不同 I_3 条件下的 P_g 曲线，以及 $P_g=P_m$ 的解的情况。当 $I_3=1$ p.u.或 3 p.u.时， $P_g=4$ p.u.有两个解，一个稳定平衡点和一个不稳定平衡点。而当 I_3 增加到 5 p.u.时， $P_g=4$ p.u.仅有一个稳定平衡点的解，不存在不稳定平衡点。说明较大的 I_3 使得不稳定平衡点消失。比较不同 P_m 条件下的解。对于 $P_g=2$ p.u.的解，当 $I_3=3$ p.u.或 5 p.u.， δ_g 都只有一个稳定平衡点。与 $P_g=4$ p.u.相比较，较小的 P_m 也会使得不稳定平衡点消失。

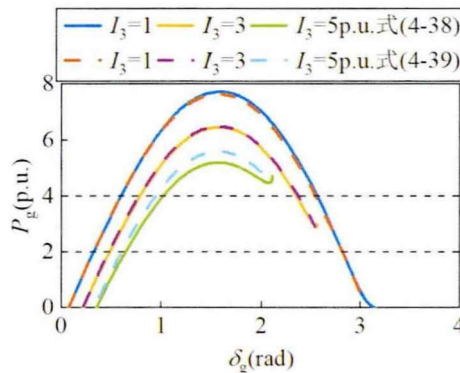


图 4-15 同步发电机电磁功率 P_g -功角 δ_g 曲线

Fig. 4-15 Electromagnetic power of synchronous generator P_g - power angle δ_g curve

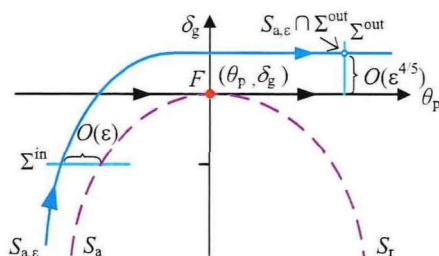
因此，较大的变流器输出电流 I_3 与较小的同步发电机机械功率 P_m 会使得慢系统的稳定边界由奇异点决定而不是不稳定平衡点。这说明大规模新能源接入电网使得锁相环与同步发电机更容易发生动态交互。

4.3.3 慢动态到快动态过程的定性分析

针对前面所描述的锁相环与发电机功角动态交互的场景，基于几何奇异摄动理论^[186]，定理 4.1 对锁相环与同步发电机动态耦合的过程进行了理论解释。

奇异点附近的轨迹示意图如图所示。图中红色点 F 表示奇异点。奇异点 F 将 $V_q=0$ 的集合分成两段，左边为快动态吸引的点集 S_a 。在奇异点附近取两个横截面，如图 4-16 所示， $\Sigma^{\text{in}}=\{(\theta_p, y_p, \delta_g, \omega_g), \theta_p \in J, y_p \in R, \delta_g=\theta_p^F-\rho^4, \omega_g>1\}$ ， J 表示 θ_p^F 附近一个小的区间， ρ 表示一个小的正数。 $\Sigma^{\text{out}}=\{(\theta_p, y_p, \delta_g, \omega_g), \theta_p=\theta_p^F+\rho^2, y_p, \delta_g, \omega_g \in R\}$ 。有以下定理成立。

定理 4.1: 基于方程(4-29)在奇异点附近建立从 Σ^{in} 到 Σ^{out} 的映射，存在 ε_0 ，当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 时，经过 Σ^{in} 的轨迹 $S_{a,\varepsilon}$ 将从坐标 $(\theta_p^F+\rho^2, y_p, h(\varepsilon), \omega_g)$ 处穿过 Σ^{out} ，其中 $h(\varepsilon)=O(\varepsilon^{4/5})$ 。

图 4-16 奇异点附近轨迹的在 θ_p - δ_g 平面上的投影Fig.4-16 Projection of trajectory near singular point on θ_p - δ_g plane

由该定理可知, 如果发电机功角 δ_g 在逼近奇异点 F 之前速度未减为 0, 那么系统轨迹将越过奇异点 F , 且在 F 点足够小的领域内, 系统的动态过程将从式(4-30)所描述的慢动态过程, 跳跃到式(4-31)所描述的快动态过程。也就是说, 系统轨迹 $S_{a,\epsilon}$ 沿着 $V_q=0$ 的稳定分支 S_a 越过奇异点 F 之后, 锁相环输出角度 θ_p 几乎总是以远快于发电机的功角变化的速度增大, 而发电机功角 δ_g 变化较小。下一节将进一步通过分析奇异点 F 处的性质, 得到锁相环对发电机功角稳定的影响。

4.3.4 锁相环失步对同步发电机动态的影响机理

4.3.4.1 奇异点附近同步发电机转速的解析

在奇异点处进行泰勒展开, 得到发电机转速在奇异点的一个很小领域内的表达式(4-40):

$$\omega_g \approx 1 + \omega_g^F + \frac{7d_1}{16} \frac{t}{T_j} - \frac{3d_2}{16} \frac{t^2}{\epsilon T_j^2} \quad (4-40)$$

式中: t ——时间, 以奇异点领域内的一点作为 $t=0$ 时刻;

d_1 —— $t=0$ 时刻 $2T_j d\omega_g/dt$ 的值;

d_2 —— $t=0$ 时刻 $2\epsilon T_j (\partial P_g/\partial \theta_p) \cdot (d\theta_p/dt)$ 的值;

ω_g^F —— $t=0$ 时刻的发电机转速偏差。

推导过程与 d_1 和 d_2 的系数表达式见附录 F。

根据式(4-40), 轨迹穿过图 4-16 的奇异点 F 附近区域之后进入到奇异点 F 的右侧区域时, 有以下两种情况:

(1) 当奇异点附近区域内 $d_2 > 0$, 越过奇异点后同步发电机转速减小。若 $d_1 > 0$, 发电机转速先增大后减小; 若 $d_1 < 0$, 发电机转速单调减小。

(2) 当奇异点附近区域内 $d_2 < 0$, 轨迹越过奇异点后发电机转速增大。若 $d_1 > 0$, 发电机转速单调增大, 若 $d_1 < 0$, 发电机转速先减小后增大。

基于第 4.3.3 节的分析, 轨迹越过奇异点后锁相环输出角增加, 因此 $d\theta_p/dt > 0$ 。那么奇异点附近区域内 $d\omega_g/dt$ 的符号与 $\partial P_g/\partial \theta_p$ 的符号确定了 d_1 和 d_2 的符号, 决定

了轨迹越过奇异点后发电机转速的变化趋势。

忽略线路电导和 PCC 点并联负荷, 得到 $\partial P_g / \partial \theta_p$ 的表达式(4-41)。由于函数的连续性, $\partial P_g / \partial \theta_p$ 的符号在奇异点的小领域内与奇异点处同号, 那么可以用奇异点处 $\partial P_g / \partial \theta_p$ 的符号来近似表征其领域内的性质。而且基于式(4-41), $\partial P_g / \partial \theta_p = 0$ 得到 $\theta_p - \delta_g - \phi_1 = 2k\pi, k$ 取整数。那么在 $\theta_p - \delta_g$ 平面上, 奇异点右上侧的区域与奇异点处的 $\partial P_g / \partial \theta_p$ 保持同号。因此可以用奇异点处的灵敏度 $\partial P_g / \partial \theta_p$ 估计其右侧轨迹的性质。

$$\partial P_g(\theta_p, \delta_g) / \partial \theta_p = \frac{B_3 I_3 E_g \sin(\theta_p - \delta_g - \phi_1)}{B_2 + B_3 + B_L} \quad (4-41)$$

当奇异点处 $\partial P_g / \partial \theta_p > 0$ 时, 奇异点领域内 $d_2 > 0$, 那么对应于上述第一种情况, 轨迹越过奇异点后发电机转速减小, 有助于发电机恢复功角稳定。当奇异点处 $\partial P_g / \partial \theta_p < 0$ 时, 奇异点领域内 $d_2 < 0$, 那么对应于上述第二种情况, 轨迹越过奇异点后发电机转速增加, 功角更容易失稳。

两种情况的例子分别如图 4-17 b) 和图 4-18 b) 所示, 比较了近似解式(4-40)与数值解, 也验证了近似解和基于近似解分析的正确性。图 4-17 b) 和图 4-18 b) 的转速曲线分别对应于图 4-17 a) 和图 4-18 a) 中奇异点右侧领域的绿色加粗实线轨迹。图 4-18 a) 和 c) 中蓝色线表示轨迹, 蓝色点表示平衡点, 红色点表示奇异点, 紫色虚线表示 $V_q = 0$ 的解。本章后续图中的蓝色点和红色点表示相同的含义。

在图 4-17 b) 的这个例子中, $d_2 > 0, d_1 < 0$, 根据式(4-40), 转速为单调减小。转速减小到小于 1.0 p.u. 之后功角也减小, 因此发电机功角恢复稳定。在图 4-18 b) 的这个例子中, 奇异点右侧领域 $d_2 < 0, d_1 > 0$, 根据式(4-40), 转速为单调增加。在奇异点左侧领域, $d_2 < 0, d_1 < 0$, 根据式(4-40), 转速为先减小再增加。因此轨迹从奇异点左侧到奇异点右侧领域时, 转速经历先减小再增加的过程。奇异点左侧领域的转速轨迹未在图 4-18 中画出, 可以从后面更加完整的转速曲线图 4-20 a) 中得到验证。

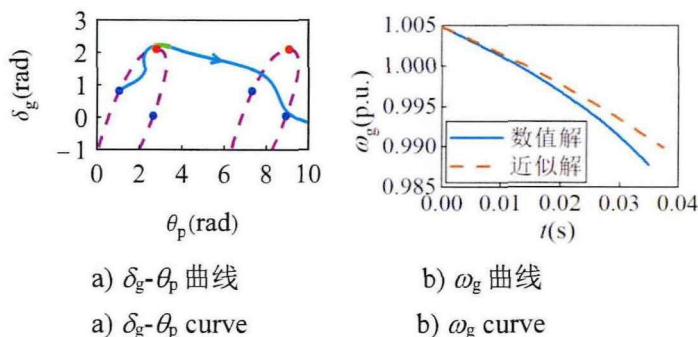


图 4-17 越过奇异点 F 之后的轨迹 (第一种情况)

Fig. 4-17 The trajectory after crossing the Singular point F (the first case)

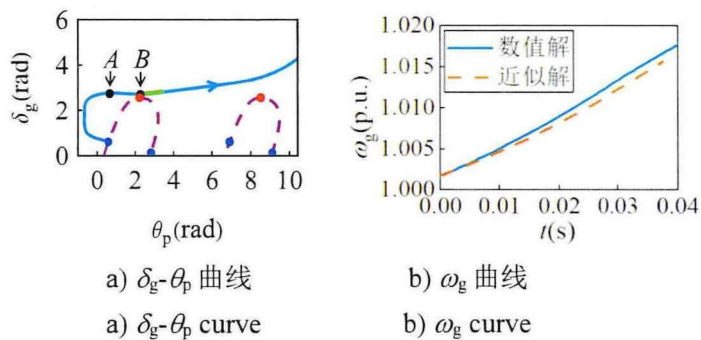


图 4-18 越过奇异点 F 之后的轨迹（第二种情况）
Fig. 4-18 The trajectory after crossing the Singular point F (the second case)

4.3.4.2 锁相环简化为代数方程的局限性

根据上一节对奇异点右侧领域内同步发电机转速的分析，变流器失去平衡点并非单一地恶化同步发电机功角稳定。简单的将锁相环简化为代数方程，难以解释如图 4-17 中所示的第一种情况的机理。以表 4-3 中网络参数 1 为例，分析数值解的物理意义，说明轨迹越过奇异点后的一段时间的物理过程。发电机的惯性时间常数为 3.4 s，发电机等值内阻抗 0.05p.u.，等值内电势 1.1 p.u.。 $D=10$ p.u.， $P_m=3$ p.u.。锁相环参数 $k_p=80$ p.u./s， $k_i=1800$ p.u./s²， $\varepsilon=0.00368$ ， $I_3=5$ p.u.， $\phi_l=0$ 。

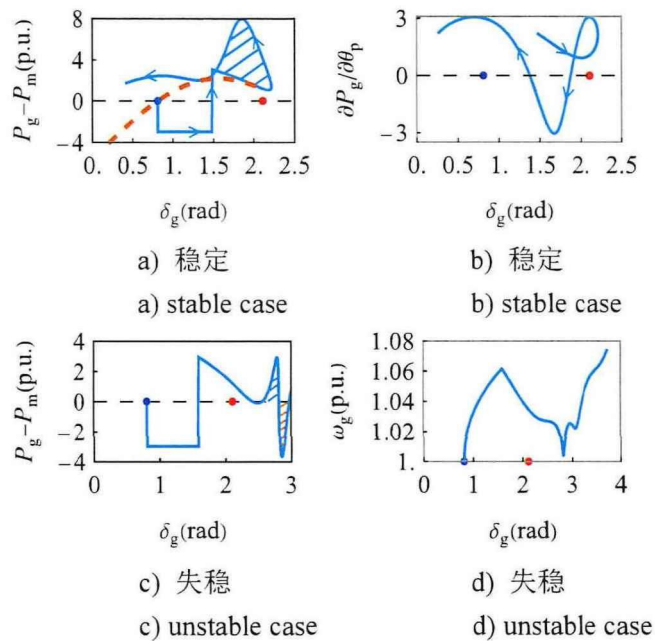


图 4-19 动态相互作用对发电机功角稳定的影响（类型 1）
Fig. 4-19 Influence of dynamic interaction on power angle stability of generators (type 1)

故障切除后，系统轨迹在 θ_p - δ_g 平面上的投影如图 4-17 a) 中蓝色线所示。发电机的电磁功率 P_g 先增大再减少，如图 4-19 a) 所示，其中橙色虚线表示图 4-16 中奇异点 F 左边部分 $V_q=0$ 的解 S_a ，斜线阴影部分表示 θ_p 增大过程中所“额外”增加的减速面积。此时奇异点 F 的坐标 $(\theta_p^F, \delta_g^F)=(2.80176, 2.11198)$ ，在奇异点处

$\partial P_g/\partial \theta_p=1.94444>0$ ，其灵敏度变化曲线如图 4-19 b)所示。因此，轨迹越过奇异点 F 时发电机的电磁功率 P_g 也短时增加，形成了图 4-19 a)中的阴影区域。其物理意义可以解释为锁相环输出角度的快速增加对发电机电磁功率的影响，改变了同步发电机功角的减速面积。

当故障更加严重时，锁相环输出角度 θ_p 增大过程中所“额外”增加的减速面积也不足以使发电机功角减速，发电机才可能失去功角稳定。在图 4-19 a) 例子的基础上增加故障持续时间得到图 4-19 c) 所示曲线，其中 θ_p 增大过程中对应的发电机减速面积为蓝色阴影部分，对应的加速面积为红色阴影部分。虽然轨迹越过奇异点 F 之后，减速面积增大，发电机转速 ω_g 迅速降低（对应于图 4-19 d) 中 $\delta_g=2.8$ rad），但是 ω_g 并未恢复到同步转速 1p.u.。随后电磁功率减小，加速面积进一步增大，发电机很快失去同步。但是这时失稳的临界状态却没有对应的“不稳定平衡点”，或者“主导不稳定平衡点”。

4.3.4.3 同步发电机功角稳定受锁相环制约的条件

图 4-18 所示的第二种情况体现了锁相环对同步发电机功角稳定性的制约，因为锁相环动态过程恶化了发电机功角稳定，锁相环失稳与同步发电机功角失稳几乎同时发生。因此，在奇异点 F 处 $\partial P_g/\partial \theta_p<0$ 成为同步发电机功角稳定受锁相环制约的条件。

将网络参数 Z_2 减小到 1/6p.u.，见表 4-3 中的网络参数 2。在奇异点处 $\partial P_g/\partial \theta_p=-0.653846<0$ 。系统轨迹在 θ_p - δ_g 平面上的投影如图 4-18 a)中蓝色线所示，在其他平面上的投影如图 4-20 所示。图 4-18 c)中 A 点到 B 点之间的轨迹段对应于图 4-20 中红色方框里的部分。

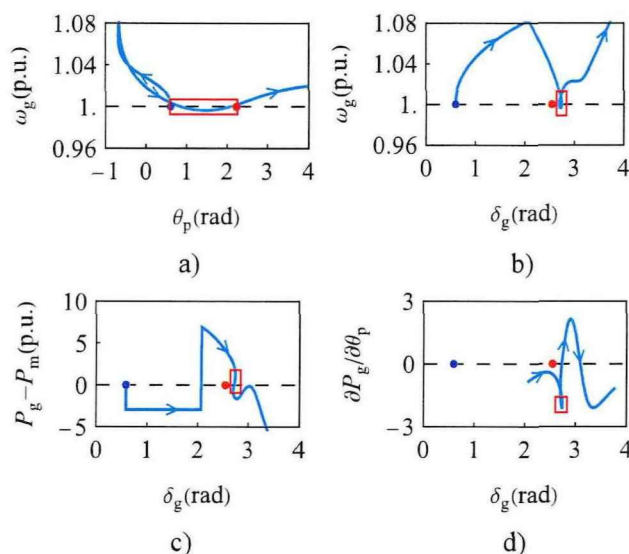


图 4-20 动态相互作用对发电机功角稳定的影响（类型 2）

Fig.4-20 Influence of dynamic interaction on power angle stability of generators (type 2)

故障期间, 发电机功角 δ_g 增大。故障切除后, 轨迹经过 A 点之后功角 δ_g 开始减速并回摆, 如图 4-20 a)、b)所示。但是在轨迹经过 B 点之后, 功角又开始加速增大, 并且发电机功角失稳。在从 A 点到 B 点这一过程中, 注意到两点特征: (1) 发电机功角轨迹在 AB 段之间有恢复稳定的趋势, 如图 4-20 b)和 c)所示, $\omega_g < 1.0 \text{ p.u.}$ 满足发电机稳定判据。(2) 功角 δ_g 的变化很小, 而锁相环输出角度 θ_p 变化范围较大。图 4-20 c)表明, 尽管功角在 AB 段中回摆, 但功率却仍然往下跌落, 与传统交流系统中发电机的功角-功率曲线不同。图 4-20 d)说明这个现象的原因是锁相环输出角度快速增大, 且发电机的电磁功率对锁相环输出角度的灵敏度是负数, 导致发电机电磁功率快速减小, 功角从减速变成加速。因此, 奇异点处 $\partial P_g / \partial \theta_p < 0$ 时, 越过奇异点 F 之后, 锁相环输出角增大的动态过程成为了功角失稳的一个主要原因。

4.3.5 算例分析

4.3.5.1 三节点系统算例：锁相环简化为代数方程的局限性验证

在 PSCAD/EMTDC 搭建如图 4-21 所示的电路对上述分析进行仿真验证。逆变侧变流器外环采用定交流电压控制和定直流电压控制, 整流侧采用有功功率控制和无功功率控制。假设故障期间直流回路的卸荷耗能电路维持直流电压的稳定。在故障期间, 逆变站 PCC 点电压跌落, 触发低压穿越控制模块。此时, 根据电网导则要求, 为了支撑交流电压, 有功电流指令值 i_d^* 等于零; 无功电流指令值 i_q^* 等于逆变站允许的最大电流 $-i_{\max}$ 。锁相环 PI 环节的比例系数 k_p 和积分增益 k_i 分别为 80 p.u./s 和 1800 p.u./s², 带宽约等于 16.16 Hz, 阻尼比 ξ 约等于 0.94^[178,187]。发电机惯性时间常数换算到 100MW 的基准值下为 17s, 式(4-29)中的 $\varepsilon=0.00074$, 其他参数见表 4-4。

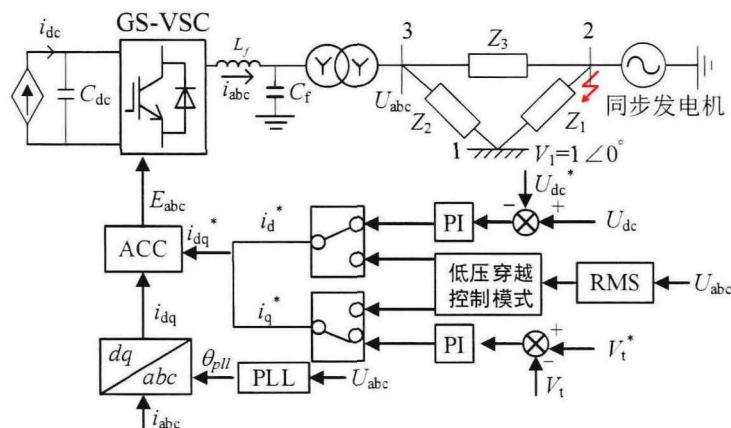


图 4-21 仿真模型示意图

Fig.4-21 Simulation model schematic diagram

网络参数的基准电压为 500kV，基准容量为 100MW。按照同步发电机等值内阻抗 0.05p.u. 计算，将同步发电机暂态电抗通过星三角变换归算到网络阻抗中，归算

之后网络参数 1 的结果为 $B_1=-5\text{p.u.}$, $B_2=-4.5\text{p.u.}$, $B_3=-5\text{p.u.}$, 网络参数 2 的结果为 $B_1=-5\text{p.u.}$, $B_2=-8.5\text{p.u.}$, $B_3=-5\text{p.u.}$ 。

表 4-3 网络参数

Table 4-3 Parameters of network

	Z_1 (p.u.)	Z_2 (p.u.)	Z_3 (p.u.)	Z_L (p.u.)
网络参数 1	$j0.1$	$j0.5$	$j0.1$	$-j0.5$
网络参数 2	$j0.1$	$j0.1667$	$j0.1$	$-j0.5$

表 4-4 其他元件的参数（基准容量 500MW）

Table 4-4 Parameters of other components (basic capacity 500MW)

元件	参数名	参数值(p.u.)	参数名	参数值(p.u.)	参数名	参数值(p.u.)
内环电流	k_p	0.6	k_i	20	L_f	0.0724(H)
	X_d	1.0	X_l	0.13	X_d''	0.22
发电机参数	X_d'	0.3	X_q	1.0	T_{q0}''	0.034 (s)
	T_{d0}'	9 (s)	X_q''	0.29	T_J	1.7 (s)
励磁系统参数	K_A	40	T_A	0.01(s)		

稳态时, $P_m=2.0\text{p.u.}$, $I_3=5.39\text{p.u.}$, $\phi_3=0.38\text{ rad}$, 网络参数为表 4-3 中网络参数 1。该条件属于图 4-17 的情况。在 0.01s 时刻, 发电机出口处母线发生三相接地短路瞬时故障。故障持续时间 0.245s 时, 奇异点附近的轨迹见图 4-22 阴影部分。在这段时间内, PCC 点电压跌落严重, 锁相环因此失去平衡点。角速度 ω_p 快速增大, 迅速达到了上限值 1.2 p.u., 导致锁相环输出角 θ_p 快速增大, 而发电机的转速逐渐减小。发电机功角 δ_g 变化较小, 但发电机电磁功率快速增大, 它与 θ_p 快速增大同时发生, 验证了本章 4.3.4.2 节的分析: $\partial P_g/\partial \theta_p > 0$ 时, θ_p 增大初期提供的发电机 P - δ 平面上的“减速面积”有利于发电机保持功角稳定。

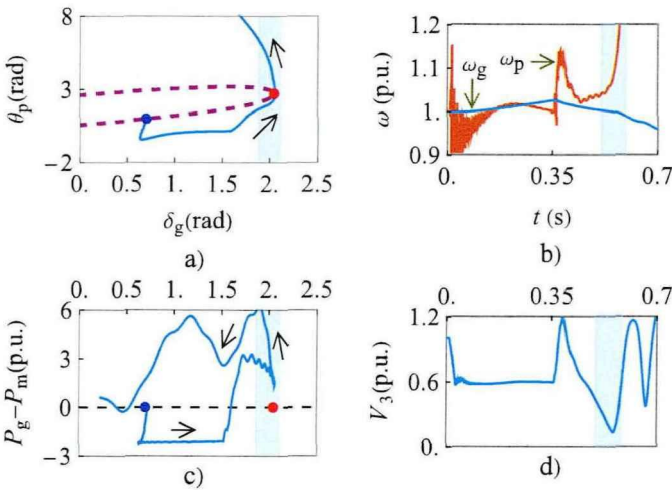


图 4-22 故障切除后奇异点附近的轨迹（类型一，稳定）

Fig.4-22 Trajectory near Singular point after fault (type 1, stable)

当故障持续时间增加至 0.37s 时, 同步发电机才出现功角失稳, 如图 4-23 所示。

θ_p 快速增大导致的减速面积增加效应仍然不足以使发电机功角回摆。

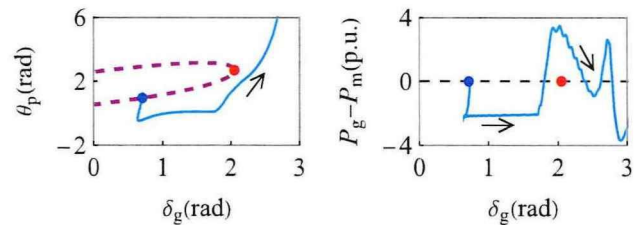


图 4-23 故障切除后奇异点附近的轨迹（类型一，失稳）

Fig.4-23 Trajectory near Singular point after fault (type 1, unstable)

4.3.5.2 三节点系统算例：同步发电机功角稳定受锁相环约束条件的验证

减小变流器与无穷大系统之间的等值线路阻抗至 1/6 p.u.。稳态时, $P_m=2.0$ p.u., $I_3=5.15$ p.u., $\phi_3=0.3$ rad。该条件属于图 4-18 的情况。0.01s 时刻发生三相短路瞬时故障, 故障持续时间 0.385s, 锁相环和同步发电机都发生了失稳, 奇异点附近轨迹见图 4-24 阴影部分。但系统轨迹越过奇异点之后表现出了与算例一不同的特征。同步发电机电磁功率 P_g 在越过奇异点后继续下降, 然后才有小幅度的回升。锁相环的快速动态没有立刻给发电机的转子运动起到减速的作用。如果故障持续时间从 0.385s 减少到 0.384s, 发电机和锁相环都能保持稳定, 没有算例一中变流器失去平衡点而发电机功角恢复稳定的状态。

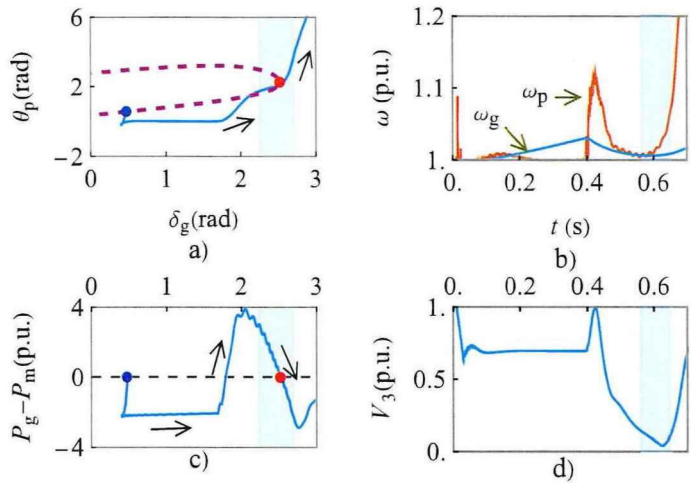


图 4-24 故障切除后奇异点附近的轨迹（类型二）

Fig.4-24 Trajectory near break point after fault (type 2)

奇异点附近 $\partial P_g / \partial \theta_p < 0$, 可以在接近奇异点 F 时给锁相环输出角 θ_p 施加 -1rad 的扰动来观察。如图 4-25 中红色线所示, 施加 -1rad 的扰动后, 发电机电磁功率短时上升, 说明 $\partial P_g / \partial \theta_p < 0$ 。而且, 扰动之后发电机功角从奇异点位置开始回摆, θ_p 也恢复了稳定, 验证了本章 4.3.4.3 节的分析: $\partial P_g / \partial \theta_p < 0$ 时, 变流器失去平衡点对发电机功角稳定有恶化的作用。

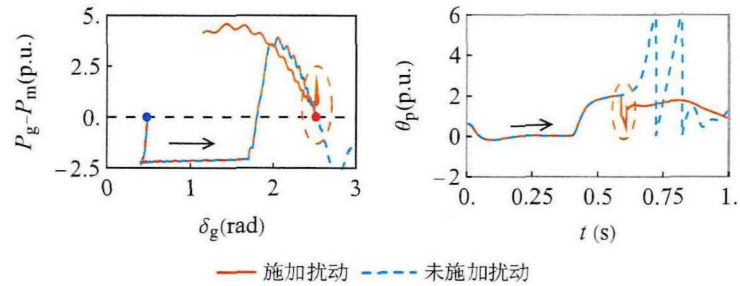


图 4-25 锁相环扰动对发电机功角稳定的影响

Fig.4-25 Influence of PLL disturbance on generator rotor angle stability

4.3.5.3 IEEE39 系统算例

上述机理分析可以拓展到多换流器和多发电机系统。如附录 B 中图 B-2 所示的 IEE39 系统，在母线 4、7、8 处各经一条线路接入电压源型变流器，0 秒时刻在母线 14 发生三相瞬时短路故障。当故障持续时间为 0.165 秒时，发电机功角稳定，如图 4-26 b)所示。在发电机功角增大过程中，母线 8 的电压幅值最低跌落至 0.3p.u.，与此相连的 VSC2 受发电机功角增大、临界割集区域的母线电压降低而导致其锁相环失去平衡点，如图 4-26 a)所示。

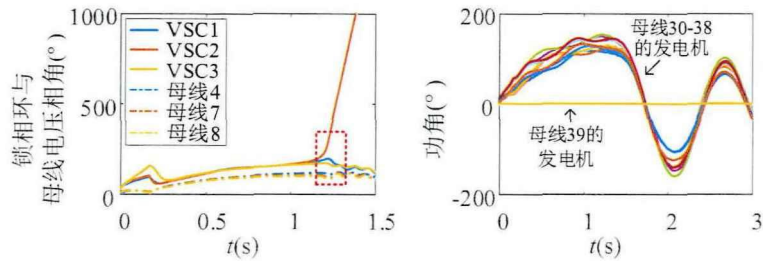


图 4-26 电压相角和功角曲线

Fig. 4-26 Bus angle and power angle curves

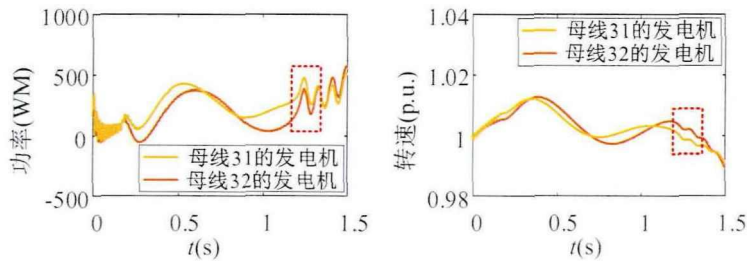


图 4-27 同步发电机功率和转速曲线

Fig.4-27 Synchronous generator power and speed curves

在 1.22 秒 VSC2 的锁相环失稳后，母线 31 与母线 32 所连同步发电机的电磁功率增大，其转速下降得更快，如图 4-27 所示。再次验证了文中所述的第一种交互机理：锁相环失稳给发电机短暂的提供了额外得减速面积，有利于发电机恢复功角稳定。增加故障持续时间至 0.167 秒，发电机和锁相环都失去稳定，见第 5 章中图 5-23。

4.4 本章小结

本章分析了同步发电机与电动机的交互规律,分析了同步发电机与锁相环交互的条件,揭示了变流器失去平衡点对同步发电机暂态功角稳定性的影响机理。本章的结论如下:

(1) 同步发电机与电动机之间的交互作用具有两种表现形式:同步发电机功角与电动机等值电导在子系统不稳定平衡点附近的强交互作用,网络传输能力不足表现出来的轨迹遇到奇异点后失稳。电动机的等值电导增大对发电机功角稳定性的影响具有非单调性,但当电动机等值电导增加较多时总是会恶化同步发电机功角稳定性。同步发电机功角增大也会减小电动机的稳定区域。在功角子系统的不稳定平衡点附近,两者表现出很强的耦合现象。这是一种新的耦合失稳现象,不同于整个系统不稳定平衡点处的失稳模式。

(2) 在故障后系统恢复阶段,发电机功角摆开过大可能使得变流器失去平衡点,导致锁相环与同步发电机的动态过程耦合。尤其在含有高比例电力电子设备和较小容量同步发电机的系统中,这种耦合更容易主导功角稳定域的边界。因此研究高比例新能源电力系统的暂态功角稳定需要考虑锁相环的影响。

(3) 根据奇异点附近锁相环输出角度变化对发电机电磁功率的灵敏度正负,锁相环与发电机的交互作用可分为两种类型:a)锁相环输出角的快速变化为发电机提供了额外的减速面积,在一定程度上改善了发电机的暂态功角稳定性;b)锁相环输出角的快速变化恶化发电机的暂态功角稳定。锁相环对同步电机功角稳定的制约体现在第二种类型,因此对于功角稳定性分析需要着重考虑第二种类型。该结论对研究含电压源换流器和同步发电机的电力系统的功角稳定边界条件、在线稳定评估等具有参考意义。

第 5 章 功角电压耦合失稳场景的识别方法

5.1 引言

随着电网的复杂互联，电力系统中的功角失稳和电压失稳现象常常同时出现，相互耦合。针对难以识别功角、电压失稳耦合场景，并根据失稳模式如何采取有针对性的控制措施的问题，本章探讨了耦合场景和解耦场景的识别方法。

首先，本章根据系统轨迹和奇异点在功角-功率 (δ_g - P_3) 平面和功角-电流 (δ_g - I_3) 平面上的投影，提出了考虑网络结构和负荷水平的功角/电压耦合失稳场景分类方法，主要针对以下四种典型场景进行了详细分析：电动机或变流器设备靠近同步发电机电源、大系统电源或者远离电源、以及位于功角失稳时网络的临界割集附近。然后，针对功角/电压稳定裕度和距离奇异点的裕度，提出了量化评估指标体系。最后，基于第 4 章的耦合机理分析，针对功角失稳和电压失稳的耦合模式，提出了评估耦合强度与识别耦合类型的量化指标体系。

5.2 不同网络结构下的失稳场景

以下根据其网络结构与动态特征进行分类，并通过指标对这些类别进行识别与耦合强度计算。

5.2.1 分析方法：功角-功率平面和功角-电流平面

基于第 4 章的分析，在奇异点附近，功角、电压动态的耦合作用容易体现。在以前的研究中，由于奇异点附近电压幅值偏低，将轨迹越过奇异点后出现的失稳现象归类于电压失稳。本节针对不同的网络结构，挖掘在奇异点附近代数变量 y （例如电压幅值）与状态变量 x （例如发电机功角）之间强耦合的场景，对多种失稳现象进行了分析。

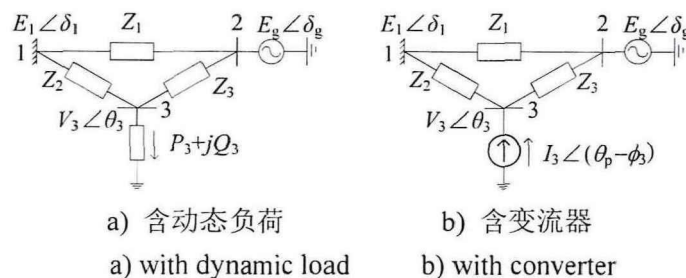


图 5-1 三节点系统

Fig. 5-1 Three-node system

本节研究的网络结构仍然是三节点系统,如图 5-1 所示。如果母线 3 所连设备为动态负荷,例如电动机,由于其稳定时对外表现出恒功率特性,可以通过 δ_g-P_3 平面分析其轨迹特征。如果母线 3 所连设备为并网型变流器,由于故障期间及故障后恢复期间变流器表现出电流源的外特性,可以通过 δ_g-I_3 平面分析其轨迹特征。如果母线 3 所连接设备表现出恒阻抗的外特征,母线 3 的电压与发电机功角难以产生耦合,因此下面主要对前两种类型的设备进行分析。

5.2.1.1 δ_g-P_3 平面

假设母线 3 所连接设备为电动机负荷, δ_g-P_3 平面可以观察和分析负荷与发电机在奇异点附近的交互特性。对于图 5-1 所示的 3 节点系统,假如已知负荷的功率因数 ϕ_3 ,系统的其他变量都可以由 δ_g 与 P_3 表示。因而,奇异点也可以由 δ_g 与 P_3 表示,对应于 δ_g-P_3 平面上的曲线。

在图 5-1 中,母线 3 的功率平衡方程式(5-1)。

$$F(U_3, \lambda) = U_3^*(Y_2 + Y_3)U_3 + U_3^*(-Y_2U_1 - Y_3U_2) + S_3^* = 0 \quad (5-1)$$

式中 Y_1 、 Y_2 和 Y_3 ——网络支路导纳,等于图 5-1 中 Z_1 、 Z_2 和 Z_3 的倒数;

U_1 、 U_2 、 U_3 ——母线电压相量, $U_2 = E_g \angle \delta_g$, $U_3 = V_3 \angle \theta_3$, $U_1 = 1 \angle 0^\circ$;

$()^*$ ——共轭运算;

S_3 ——负荷功率, $S_3 = P_3 + jP_3 \tan \phi_3$ 。

基于第 3 章中式(3-51),三节点系统奇异点的必要条件 $\det(F_y) = 0$ 等价于式(5-2)。

$$V_3 = \left(\frac{P_3^2 (1 + \tan^2 \phi_3)}{(B_2 + B_3)^2 + (G_2 + G_3)^2} \right)^{1/4} \quad (5-2)$$

式中 G_2 、 G_3 —— Y_2 , Y_3 的实部;

B_2 、 B_3 —— Y_2 , Y_3 的虚部。

下面通过分析系统轨迹与奇异点在 δ_g-P_3 平面的投影,来分析不同网络结构下的不同失稳模式。基于功率平衡方程和上述推导过程,图 5-4 到图 5-7 中奇异点在 δ_g-P_3 平面上的投影的求解过程如下:

- (1) 给定 $E_g=1$, 和负荷功率因素 ϕ_3 ;
- (2) 从某一个 δ_g 开始计算,联立式(5-1)和式(5-2)解得 θ_3 ;
- (3) 将 (δ_g, θ_3) 代入式(5-1)得到 P_3 , 即得到系统的一个奇异点 (δ_g, P_3) ;
- (4) 修改 δ_g 计算下一个奇异点,重复(2)步到(3)步。

由于在式中,一个 δ_g 对应多个 θ_3 的解分支。一方面由于三角函数具有周期性,另一方面有一些 (δ_g, θ_3) 是低电压解,可以排除。所以在第(2)步中可以通过校验系统的潮流雅克比矩阵的行列式的符号来限定求解范围,其中高、低电压解对应的行列式符号相反。第 3 章中式(3-51)与潮流方程雅克比矩阵不同的是,式(3-51)中没有 PV

母线，只有 PQ 母线和 Vθ 母线。

线路转移电导对奇异点的影响很小，以网络参数 $Z_1=+\infty$ 、 $Z_2=j0.1$ 、 $Z_3=j0.1$ 为例，负荷功率因素为 89.44%，奇异点在 δ_g - P_3 平面上的投影如图 5-2 所示。其中，蓝色实线表示忽略线路转移电导的奇异点，红色虚线表示线路转移电导等于 0.1 倍电纳幅值($G=-0.1B$)条件下的奇异点。从图 5-2 中看出，在负荷功率为正的区城，忽略转移电导的奇异点几乎与考虑转移电导的奇异点重合。因此，当 $G \ll -B$ 时，忽略转移电导不影响文中的分析结果。

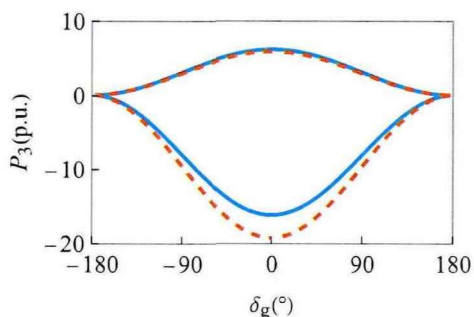


图 5-2 考虑线路电导与未考虑线路电导的奇异点

Fig.5-2 Singular points with and without line conductance

5.2.1.2 δ_g - I_3 平面

如果母线 3 的设备具有电流源的特性，例如故障穿越过程中的变流器，则可以通过 δ_g - I_3 平面进行分析。通过比较系统轨迹在 δ_g - I_3 平面上的投影，以及 δ_g - I_3 平面上奇异点的位置，比较不同网络结果下不同失稳形态的特点。

对于图 5-1 所示的 3 节点系统，母线 3 的功率平衡方程式(5-3)。

$$F(U_3, I_3) = U_3^* (Y_2 + Y_3 + Y_L) U_3 + U_3^* (-Y_3 U_2 - Y_2 U_1) - V_3 I_3 e^{j\phi_3} \quad (5-3)$$

式中 ϕ_3 ——母线 3 电流滞后电压的相角，如果母线 3 注入功率， $\phi_3 = \text{atan}(Q_3/P_3)$ ；

如果母线 3 流出系统功率， $\phi_3 = \text{atan}(Q_3/P_3) + \pi$ ；

I_3 ——母线 3 注入或者流出电流的幅值，方向有角度 ϕ_3 确定；

G_L 、 B_L —— Y_L 的实部和虚部。

基于电流平衡方程， δ_g - I_3 平面上的奇异点的计算过程通过以下两步进行说明：

- (1) 第一步，给定 $E_g=1$ 和相角 ϕ_3 。
- (2) 第二步，基于第 3 章中的表达式(3-51)， $\det(F_y) = 0$ 等价于式(5-4)。

$$\frac{V_3}{I_3} = \frac{(G_2 + G_3 + G_L) \cos \phi_3 - (B_2 + B_3 + B_L) \sin \phi_3}{(B_2 + B_3 + B_L)^2 + (G_2 + G_3 + G_L)^2} \quad (5-4)$$

线路转移电导对奇异点的影响同样很小，以网络参数 $Z_1=j0.2$ 、 $Z_2=j2/9$ 、 $Z_3=j0.2$ 、 $Y_L=0$ 为例，变流器为单位功率因素运行方式时， $\phi_3=0$ ，奇异点在 δ_g - I_3 平面上的投影如图 5-3 所示。其中，蓝色实线表示忽略线路转移电导的奇异点，红色虚线表示线

路转移电导等于 0.1 倍电纳幅值($G=-0.1B$)条件下的奇异点。从图 5-3 中看出, 忽略转移电导的奇异点几乎与考虑转移电导的奇异点重合。因此, 当 $G\ll -B$ 时, 忽略转移电导不影响文中的分析结果。

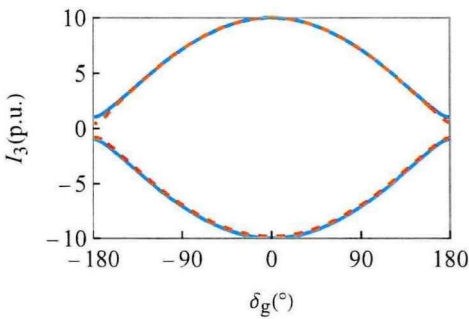


图 5-3 投影在 δ_g - I_3 平面上的可行域

Fig.5-3 Feasible region projected on δ_g - I_3 plane

5.2.2 不同网络结构与失稳形态的关系

5.2.2.1 同步发电机功角与负荷电压的失稳形态分析

根据三节点系统中网络参数相对大小的不同以及所体现出来的不同的系统动态特征, 可以将网络结构分为以下四类: 母线 3 靠近大系统 (CS, System Model with Bus 3 Closer to the larger System, $Z_2<Z_3$)、母线 3 靠近同步发电机 (CG, System Model with Bus 3 Closer to the synchronous Generator, $Z_2>Z_3$)、母线 3 远离电源 (FS, System Model with Bus 3 Far away from Sources, $Z_2\approx Z_3$, Z_1 小于 Z_2 和 Z_3)、母线 3 与临界割集区域直接相连 (CC, System Model with Bus 3 direct Connected to critical Cutset, $Z_2\approx Z_3$, Z_1 远大于 Z_2 和 Z_3), 其典型线路参数如表 5-1 所示。以下针对这四种网络结构分别分析同步发电机的功角失稳与负荷母线的电压失稳之间的联系。

表 5-1 四类系统模型典型线路参数 (单位 p.u.)

Table 5-1 Typical line parameters of four types of system models (unit p.u.)

No.	类型	Z_1	Z_2	Z_3
1	CS	j0.2	j0.05	j0.2
2	CG	j0.2	j0.2	j0.05
3	FS	j0.05	j0.2	j0.2
4	CC	$+\infty$	j0.1	j0.1

(1) 母线 3 靠近大系统 (CS)

当母线 3 所连接设备为负荷且母线 3 靠近大系统节点, 发电机向大系统和负荷送电, 这种情况下同步发电机的失稳模式与纯功角失稳模式相似。网络的线路参数如表 5-1 第 1 行所示。因为负荷的功率变化主要由大系统承担, 发电机主要与大系统进行功率交换, 与负荷之间的功率交互程度较弱; 所以, 系统失稳形式以暂态功角失稳为主。图 5-4 到图 5-7 中红色虚线为奇异点连成的线, 按照故障后一段时间

的平均负荷功率因数计算得到，蓝色线为系统暂态轨迹在 δ_g - P_3 平面上的投影。

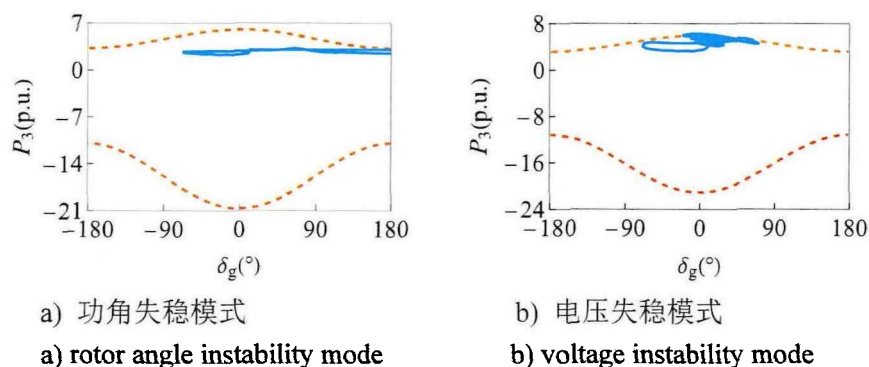


图 5-4 负荷母线靠近大系统

Fig. 5-4 System Model with the load closer to the larger System

这种场景主要发生功角失稳，如图 5-4 a)所示，不容易发生功角与电压的耦合失稳。在本章第 5.4 节中将对此功角失稳模式进行详细分析和计算。当负荷功率很大时，系统也会呈现暂态电压失稳模式，如图 5-4 b)。这时系统的轨迹与奇异点在 δ_g - P_3 平面上的投影非常接近，轨迹靠近奇异点引起暂态电压下跌^[146,147]。

(2) 母线 3 靠近同步发电机 (CG)

当母线 3 所连接设备为电动机负荷且靠近发电机时，大系统向负荷送电，这种情况更接近于纯电压失稳模式，不容易发生功角与电压的耦合失稳。网络的线路参数如表 5-1 第 2 行所示。由于发电机的功率变化主要与负荷的功率变化相关，而且负荷的扰动对发电机机群失步的影响较小，大多情况下系统以暂态电压失稳为主导，如图 5-5a)所示：系统轨迹已经越过奇异点发生了暂态电压失稳。当负荷功率较小且故障非常严重的时候，容易发生功角失稳，如图 5-5 b)所示。本章不讨论连锁故障导致发电机失步^[72]、潮流转移^[8]，最终暂态功角、电压同时失稳的情况。

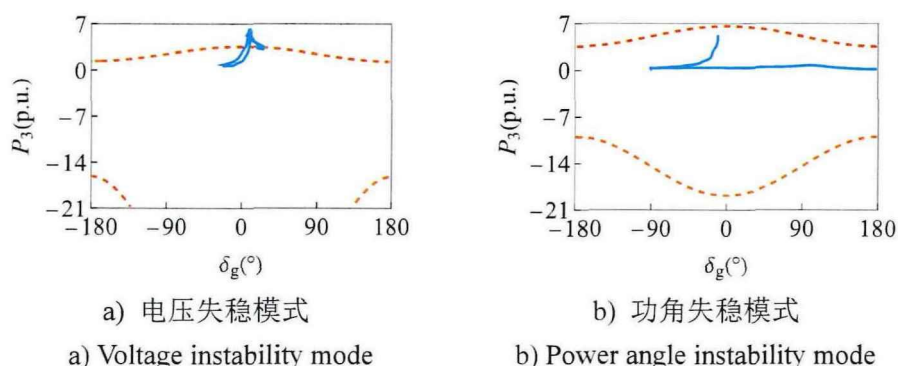


图 5-5 负荷母线靠近同步发电机

Fig. 5-5 System model with the converter closer to the synchronous generator

(3) 母线 3 远离电源 (LS)

当负荷节点与有功电源的电气距离较远时，这种网络结构是典型的电压失稳模型，不容易出现暂态功角失稳。网络的线路参数如表 5-1 第 3 行所示。系统的失稳

轨迹在 δ_g - P_3 平面上的投影如图 5-6 所示。

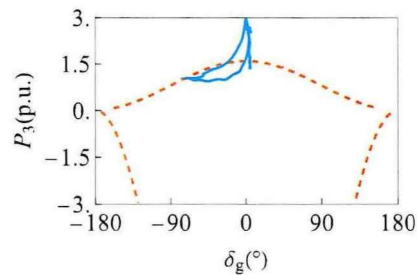


图 5-6 负荷母线远离电源模型的电压失稳模式

Fig. 5-6 Voltage instability mode where the load is far away from the sources model

(4) 母线 3 与临界割集联系紧密 (CC)

在这种网络结构下，例如表 5-1 第 4 行的线路参数，暂态电压失稳和暂态功角失稳很容易同时发生，比其他三种网络结构具有更强的耦合作用。现有的关于暂态电压与暂态功角稳定耦合特性的研究文献主要集中于这种情况，其中大多数文献将这种失稳模式归类于暂态电压失稳^[74]，因为减少负荷功率，可以显著地减少负荷动态与发电机动态之间的交互强度，改善负荷电压和发电机的稳定性。如果负荷采用静态模型，系统表现出功角失稳模式，如图 5-7 a)所示。如果负荷采用动态模型，例如电动机，系统可能表现出单一的电压失稳模式，与图 5-6 非常相似，还可能出现耦合失稳模式。本章第 5.4.2.1 节中功角/电压强交互引起的耦合算例，含电动机负荷，与图 5-7 a)中的轨迹十分相似。第 5.4.2.1 节中奇异点引起耦合的耦合算例，对应于图 5-7b)。

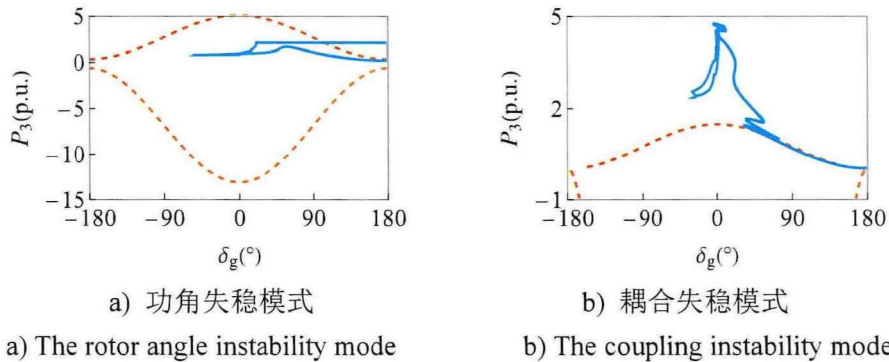


图 5-7 负荷母线与临界割集紧密联系结构

Fig. 5-7 tightly connected structure of load and critical cutset

(5) 对比分析

在以上四种网络结构中，两种失稳模式在 CC 网络结构下耦合最强。

奇异点边界的形状也反映了奇异点对两种失稳模式之间关系的影响。对于传统电力系统，母线 3 所连接设备只考虑负荷。比较图 5-4 到图 5-7 中 δ_g - P_3 平面的红色虚线：当负荷较轻时，CS 和 CG 网络结构中的功角能摆开到任意大的位置，不受奇异点约束。当负荷较重时，功角摆开到较大位置时会遇到奇异点，系统发生暂态电

压失稳^[174,188]。在 FS 和 CC 网络结构中, 奇异点几乎将稳定平衡点包围起来。这意味着, 功角摆开到足够大时会使系统轨迹遇到奇异点。尤其在重载情况下, 功角轻微摆开都会导致暂态电压失稳。如果进一步分析, 出现这种情况是由于负荷位于线路中心($Z_2=Z_3$)。

5.2.2.2 同步发电机功角与变流器电压的失稳形态分析

在新型电力系统中, 有大量电力电子设备并网。变流器 PCC 点的电压支撑特性显著影响着变流器的运行, 由此有必要分析变流器 PCC 点电压与发电机功角之间的联系。基于图 5-1 所示的 3 节点系统, 母线 3 连接变流器设备, 变流器与同步发电机向大系统送电, 基于 δ_g - I_3 平面分析不同网络结构下的失稳形态。

假设变流器更靠近大系统(偏向于 CS 型的 CC 型), 其网络参数为: $Z_1=j0.2$ p.u., $Z_2=j0.1176$ p.u., $Z_3=j0.2$ p.u.。如果轨迹未越过 δ_g - I_3 平面上的奇异点, 功角在故障切除后可恢复到故障前的运行点, 母线电压也恢复了稳定, 如图 5-8 a)所示。而图 5-8 b)表明, 当轨迹越过奇异点之后, 同步发电机功角一直增大, 未恢复到稳定运行点。变流器所连母线的电压也长时间未恢复到额定值附近, 系统同时失去了功角和电压稳定。因此, 在此网络结构下, 发电机功角与变流器的交流母线电压能够发生耦合失稳, 对应于第 4 章 4.3.4 节中的第二种耦合情况。

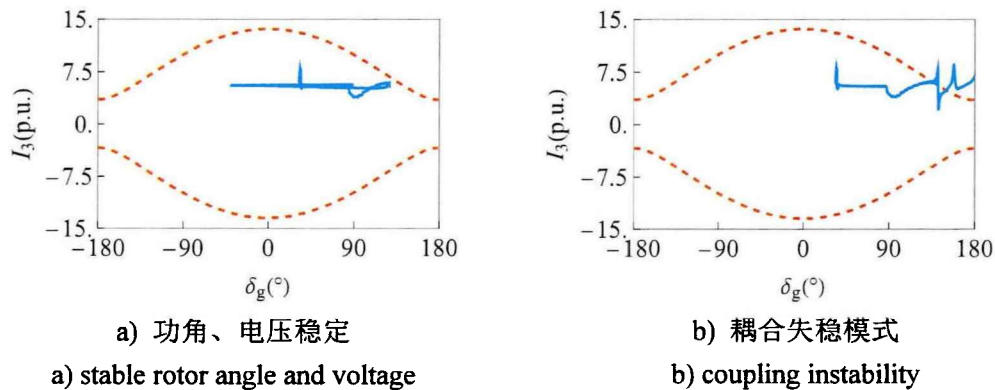


图 5-8 变流器靠近大系统

Fig. 5-8 System model with the converter closer to the larger system

当 Z_2 增大到 $j0.2222$ p.u.时, 变流器更靠近同步发电机(偏向于 CG 型的 CC 型), 系统轨迹如图 5-9 所示, 其中失稳形态与图 5-5 略有不同, 对应于第 4 章 4.3.4 节中的第一种耦合情况。在图 5-9 a)中, 轨迹越过奇异点后, 同步发电机功角恢复到故障前的稳定运行点附近, 因此暂态功角稳定, 但是电流和电压都出现了振荡。在图 5-9 b)中, 轨迹越过奇异点出现电压、功角耦合失稳。

在图 5-8 和图 5-9 中, 奇异点几乎将稳定运行点包围起来, 这种情况下发电机功角失稳时会与 PCC 点电压耦合。但是当变流器非常靠近同步发电机或者大系统时, 或者变流器向交流系统中注入电流很小时, 发电机功角与 PCC 点电压可以是解

耦的,这也是目前大多数论文中忽略同步发电机功角动态的场景。如图 5-10 a)所示,变流器非常靠近大系统($Z_1=0.175$ p.u., $Z_2= 0.0875$ p.u., $Z_3= 0.35$ p.u.), 奇异点在 δ_g - I_3 平面的两端留有较大的缺口,即使同步发电机功角失稳,也不会与奇异点相交引起 PCC 点电压失稳。如图 5-10 b)所示,当变流器靠近同步发电机($Z_1=0.259$ p.u., $Z_2=0.196$ p.u., $Z_3=0.1295$ p.u.) 且变流器向系统中注入电流较小时,轨迹就没有经过奇异点,仅仅发生同步发电机功角失稳。

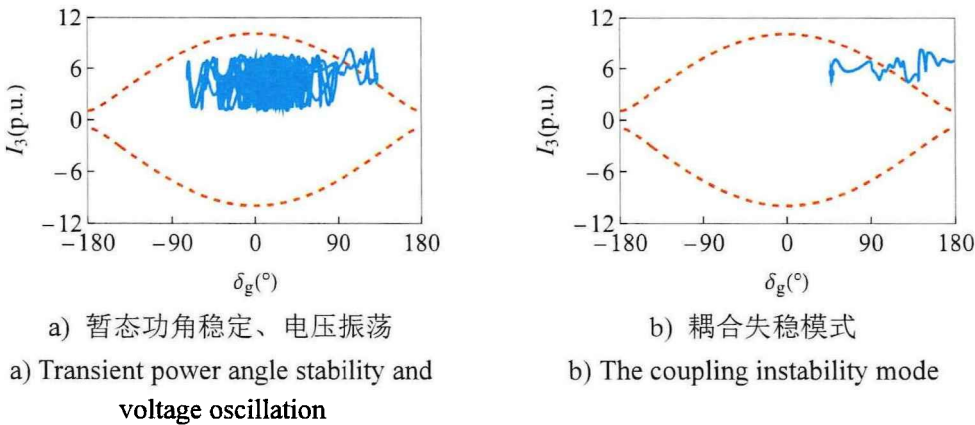


图 5-9 变流器靠近同步发电机

Fig.5-9 System model with the converter closer to the synchronous generator

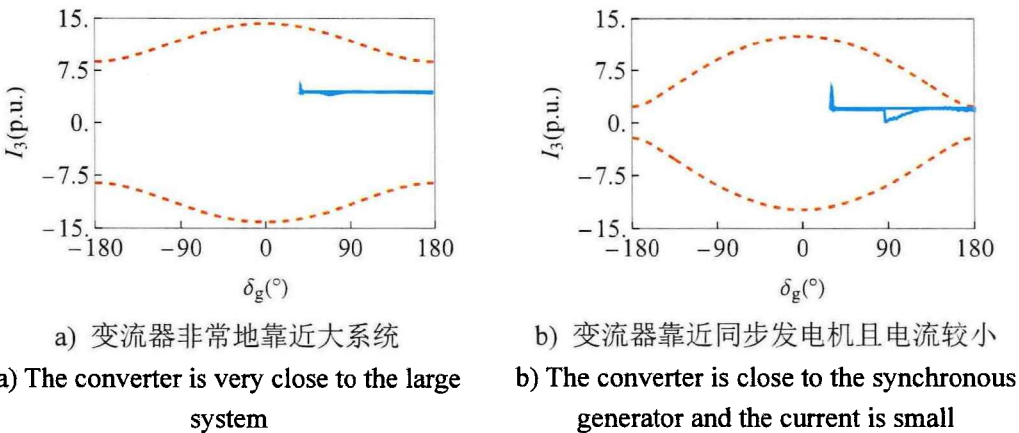


图 5-10 功角、电压解耦的场景

Fig. 5-10 Scenarios of power angle and voltage decoupling

5.3 耦合失稳场景识别方法

5.3.1 量化评估指标体系

为了量化功角稳定与电压稳定的稳定裕度,以便于识别耦合类型和评估耦合强度,本章提出功角稳定性定量评估指标 η 、负荷稳定指标 S_L 、暂态电压稳定量化评估指标 S_V 、网络传输能力指标 V_{CPI} , 负荷功率裕度指标 L_M 和变流器的运行裕度指标 C_M 。

5.3.1.1 功角稳定性量化评估指标 η

该指标的目的在于量化评估暂态功角稳定。本章采用扩展等面积法中使用的失稳指标 η ^[189]和文献中广泛采用的暂态稳定指标 TSI ^[190-193] 来评估功角稳定性。本章定义的 η 如式(5-5)。

$$\eta = \begin{cases} \frac{A_{dec} - A_{acc}}{A_{acc}} & \eta < 0 \\ \max\left(\frac{180 - \delta_{max}}{180 + \delta_{max}}, 0\right) & \eta \in [0, 1] \end{cases} \quad (5-5)$$

其中 A_{dec} 、 A_{acc} ——减速面积、加速面积。

δ_{max} ——任意两个发电机转子角之差或发电机与大系统节点的相角差在故障后偏离的最大值； $\max()$ 表示两个数中取较大的一个。

当最大减速面积小于加速面积时，系统功角不稳定， $\eta < 0$ 。当系统功角稳定时，上述发电机功角 δ 达到最大偏移位置之后回摆，如果基于减速面积和加速面积计算， $\eta = 0$ 。此时，可以基于 TSI 指标衡量发电机的稳定程度，它的取值范围为 0 到 1，越接近 1 越稳定，计算式如(5-5)中第二个式子。

5.3.1.2 负荷稳定指标 S_L

针对动态负荷，本章提出一种感应电动机稳定指标 S_L 。故障发生后，如果感应电动机失去稳定性，通常会逐渐减速直至堵转。在此过程中，感应电动机的母线无功需求急剧增加，导致一些负荷节点电压下降，严重时可能导致整个系统的电压降低。

电动机的转子运动状态由转子滑差 s 和端电压幅值决定，因此在判断电机是否稳定时，滑差和端电压幅值是主要的参考量。判断电动机的暂态稳定性主要有两种观点。第一种观点：电动机端电压达到极大值/极小值时，转子最容易加速/失稳^[194,195]。因此，在电动机端电压极大值和极小值时刻，根据转矩差和滑差 s 判断电动机稳定性。第二种观点：转矩差 $(T_e - T_m)$ 达到最大值/最小值时，转子最容易加速/减速至堵转^[196]。因此，在转矩差极大值和极小值时刻，可以根据转子运动趋势来判断电动机的稳定性。

由于电动机端电压极值和转矩差极值在时间上几乎是同步的，所以上述两种观点并不矛盾。本章基于转矩差和转差率以及端电压的大小，定义了电机暂态稳定的定量指标 S_L 如式(5-6)所示。

$$S_L = \frac{\int_{t_1}^{t_2} (T_e - T_m)(1-s)dt}{\int_{t_1}^{t_2} |(T_e - T_m)(1-s)|dt} \quad (5-6)$$

式中 t_1 、 t_2 ——故障切除时间、首先遇到的极值时间, $t_2=\max(t_{\max}, t_{\min})$; $t_{\max}$ 为故障切除后电动机端电压的极大值时刻; $t_{\min}$ 为故障切除后电动机端电压的极小值时刻;

T_e 、 T_m ——电动机的电磁转矩和机械转矩;

s ——电动机转子滑差;

S_L 的分子对应于电动机的单机势能函数, 也反映了电机的动能。可以由电机转子运动方程(5-7)简单推导得出。

$$0 = T_J \frac{d(1-s)}{dt} - (T_e - T_m) \quad (5-7)$$

在上式两边同时乘以 $(1-s)$, 得到方程两边的积分。因此, S_L 指数的分子等于 V_{PE} 。

$$V_{\text{total}} = \frac{1}{2} T_J (1-s)_2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} -(T_e - T_m)(1-s)dt = V_k + V_{PE} \quad (5-8)$$

S_L 的分母对指标进行了归一化, 使得 S_L 的范围为 $[-1,1]$ 。当 S_L 大于 0 时, 电机的暂态稳定性稳定, 且值越大, 电动机越稳定; 当 S_L 小于 0 时, 电动机的暂态稳定性失稳, 且值越小, 电动机越不稳定。

5.3.1.3 暂态电压稳定量化评估指标 S_V

在传统电力系统中, 异步电动机负荷的无功特性是造成电压跌落的一个主要原因。而在新型电力系统中, 大量变流器在故障状态下的电流源特性也会造成系统电压支撑不足, 母线电压跌落的问题。按照《电力系统安全稳定计算技术规范》^[197] 和《电力系统电压稳定评价导则》^[198] 的规定, 暂态电压稳定是指, 在电力系统受到扰动后的暂态过程中, 负荷母线电压能够在故障后 10s 内恢复到 0.80 (标幺值) 以上; 中长期过程中, 负荷母线电压能够保持或恢复到 0.90 (标幺值) 以上。因此通过量化电压跌落的程度, 可以量化评估暂态电压的稳定性^[199-202]。为了衡量暂态电压跌落的时间长度和跌落的深度, 暂态电压稳定量化指标可以分为两部分^[203]: 第一部分 T_V 衡量暂态电压跌落的深度^[201,204], 第二部分 D_V 通过惩罚项衡量暂态电压跌落的时间长度^[205,206]。

$$S_V = T_V + D_V \quad (5-9)$$

下面对 T_V 和 D_V 的具体定义进行讨论。对于不同的电压跌落程度, 赋予不同的权重, 当电压偏离额定值越远, 其电压稳定性越差。将观察时间窗口内的母线电压量测的离散序列值按照权重进行加权平均, 得到对电压跌落程度的量化评估, 计算

式如(5-10)所示。

$$T_V = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^A T_V^+(k) + T_V^-(k) \quad (5-10)$$

式中 A ——在观察时间窗口内该母线电压量测数据的数量，

k ——该母线的第 k 个量测数据；

$T_V^+(k)$ 、 $T_V^-(k)$ ——表示式分别如式(5-11)和式(5-12)所示。

$$T_V^+(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|V_N - V(k)|}{V_N - V_{th1}} & V(k) > V_{th1} \\ 0 & V(k) \leq V_{th1} \end{cases} \quad (5-11)$$

$$T_V^-(k) = \begin{cases} V(k)^2 / V_{th1}^2 - 1 & V(k) < V_{th1} \\ 0 & V(k) \geq V_{th1} \end{cases} \quad (5-12)$$

式中 V_{th1} ——设定的电压稳定的阈值；

V_N ——电压额定值；

$V(k)$ ——该母线第 k 个量测数据的电压幅值。

V_{th1} 分别取 0.5、0.7071、0.8(标么值)， V_N 取 1.0(标么值)时，电压稳定指标 T_V 的曲线取图 5-11 a)所示。所定义的衡量指标与母线电压幅值的平方呈近似线性关系或者分段线性关系，如图 5-11 b)所示，这样表达了电压稳定指标与不平衡能量累计的近似线性关系。

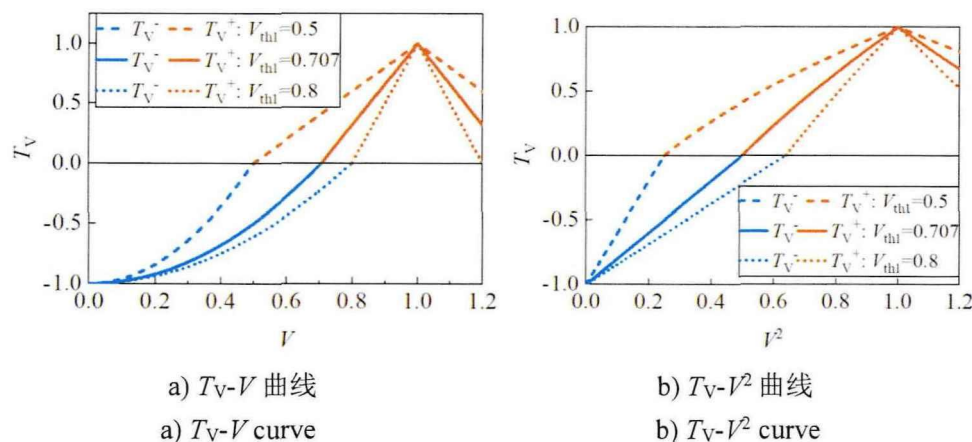


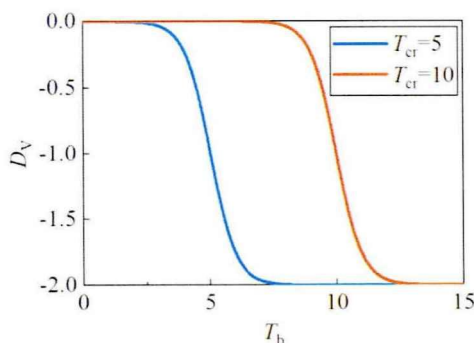
图 5-11 电压稳定指标 T_V 部分

Fig. 5-11 Voltage stability indexes T_V part

指标 D_V 部分用一个 logistic 函数来表示，当电压低于阈值 V_{th2} 的持续时间 T_b 大于可接受的最长低电压持续时间 T_{cr} 时， D_V 指标小于 -1，使得 $S_V < 0$ 。 V_{th2} 与 V_{th1} 可以不同。当 T_b 较小时， D_V 接近 0。因此， D_V 指标类似于一个惩罚项。

$$D_V = \frac{-2}{1 + e^{-2T_b + 2T_{cr}}} \quad (5-13)$$

指标 S_V 的取值范围为 $[-3, 1]$ 。当 S_V 大于 0 时，母线电压暂态稳定，且值越大，电压恢复得越快，母线电压跌落越轻；当 S_V 小于 0 时，暂态电压失稳，且值越小，电压恢复越慢，电压跌落越严重。

图 5-12 电压稳定指标 D_V 部分Fig. 5-12 Voltage stability indexes D_V part

5.3.1.4 网络传输能力指标 V_{CPI}

电压崩溃接近指标 V_{CPI} ，包含 $V_{CPI, Qi}$ 和 $V_{CPI, Pi}$ ，如式(5-14)和式(5-15)所示，可以反映功角摆开过程中的网络输电能力，它衡量了负荷功率变化引起的发电机无功功率变化量^[207]。轻载时 $V_{CPI, Qi}$ 接近 1，当电力系统发生电压崩溃时趋于无穷大。由于暂态过程发电机的电磁功率已经偏离了机械功率，所以在某一时刻计算 V_{CPI} 指标时，需要对原来的 V_{CPI} 指标稍加修正，将发电机母线看作 $V\theta$ 母线而不是 PV 母线。类似地，定义 $V_{CPI, QVi}$ 和 $V_{CPI, PVi}$ ，衡量变流器输出功率变化引起的发电机无功功率变化量。本章针对故障切除后一段时间内的每个时刻计算 $V_{CPI, Pi}$ 、 $V_{CPI, Qi}$ 、 $V_{CPI, QVi}$ 和 $V_{CPI, PVi}$ ，然后取所有负荷和变流器母线的的所有计算时刻中的最大值，作为系统故障后的 V_{CPI} 指标值。

$$V_{CPI, Qi} = \frac{\sum_k \Delta Q_{G,k}}{\Delta Q_{L,i}}, \quad V_{CPI, Pi} = \frac{\sum_k \Delta Q_{G,k}}{\Delta P_{L,i}}, \quad (5-14)$$

$$V_{CPI, QVi} = \frac{\sum_k \Delta Q_{G,k}}{\Delta Q_{V,i}}, \quad V_{CPI, PVi} = \frac{\sum_k \Delta Q_{G,k}}{\Delta P_{V,i}}. \quad (5-15)$$

式中 $\sum \Delta Q_{Gi}$ ——系统中所有无功功率的增量，例如发电机、控制交流电压的无功补偿设备（如 SVC）无功输出的变化量；

ΔP_{Li} 、 ΔQ_{Li} ——第 i 个负荷母线的有功功率增量，第 i 个负荷母线的无功功率增量；

ΔP_{Vi} 、 ΔQ_{Vi} ——第 i 个变流器的有功功率增量，第 i 个变流器的无功功率增量。

通过式(4-22)中的代数变量 y （各母线的电压幅值、相角）和奇异点计算的雅克比矩阵 J_{alg} 式(3-52)，可以计算 V_{CPI} 指标，如式(5-16)和(5-17)所示。

$$V_{CPI,Pi} = \frac{\sum \partial Q_{G,i}}{\partial P_{L,i}} = \sum \frac{\partial Q_{G,i}}{\partial y} (J_{alg})^{-1} \frac{\partial g}{\partial P_{L,i}} \quad (5-16)$$

$$(5-17)$$

5.3.1.5 负荷功率裕度指标 L_M

该指标的目的在于反映系统中有功负荷的重载程度和无功电源是否充足。在功角摆动过程中，将电源节点当作 $V\theta$ 节点利用连续潮流的方法计算负荷功率的有功/无功裕度，本章利用第 3 章中电压稳定临界点混合计算方法，针对故障切除后一段时间内的每个时刻计算负荷功率裕度，然后取所关心的负荷母线的计算时刻中的最小值作为负荷功率裕度指标 L_M 的值。

5.3.1.6 变流器的运行裕度指标 C_M

该指标的目的在于反映变流器平衡点的运行裕度。

基于第 4 章的分析，锁相环失去平衡点是锁相环与同步发电机交互条件之一。故障后系统恢复期间，变流器注入电流过大时，变流器容易失去同步稳定。因此，选取变流器注入电流的稳定指标作为变流器的运行裕度指标。

首先，说明锁相环平衡点的存在性与网络潮流模型的关系。图 5-13 a) 表示了变流器 PCC 点电压、电流经锁相环输出的相对角度 θ_p 的坐标变换前后的关系，其中电压和电流的变换式分别为式(5-18)和式(5-19)，此关系式在锁相环存在或者不存在平衡点的情况下都成立。

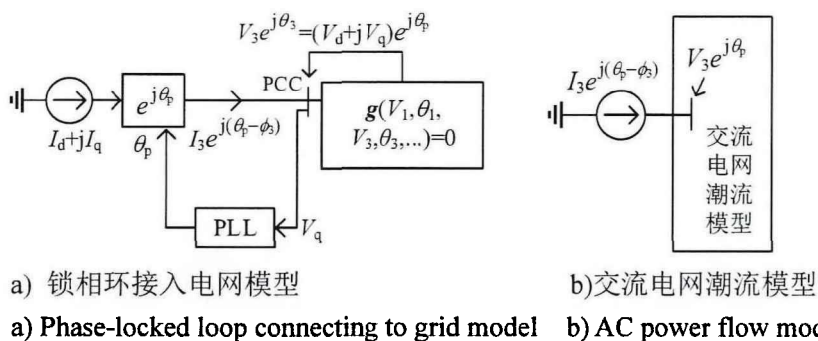


图 5-13 锁相环的平衡点与交流电网潮流计算的关系示意图

Fig.5-13 Schematic diagram of the relationship between the equilibrium point of PLL and AC power flow calculation

$$V_3 e^{j\theta_3} = (V_d + jV_q) e^{j\theta_p} \quad (5-18)$$

$$I_3 e^{j(\theta_3 - \phi_3)} = (I_d + jI_q) e^{j\theta_p} = I_3 e^{j(\theta_p - \phi_1)} \quad (5-19)$$

式中 θ_3 ——PCC 点电压相位；

ϕ_3 ——变流器注入电网电流滞后 PCC 点电压的角度；

ϕ_1 ——电流指令值滞后于 d 轴的相角， $\phi_1 = \arctan(-I_q/I_d)$ 。

若锁相环存在平衡点, $V_q=0$ 有解, 代入式(5-18), 等价于关系(5-20)。然后代入式(5-19), 得到关系(5-21)。

$$V_q = 0 \Leftrightarrow \theta_3 = \theta_p \quad (5-20)$$

$$\theta_3 = \theta_p \Leftrightarrow \phi_3 = \phi_1 \quad (5-21)$$

因此, 锁相环存在平衡点, 等价于存在潮流解使得变流器向交流电网中注入电流的幅值为 I_3 , 注入功率的功率因素为 $\cos\phi_3$, 其中锁相环的相角 $\theta_p = \theta_3$ 。也就是说, 变流器失去平衡点的问题, 可以转化为变流器接入的电网失去运行点的问题, 如图 5-13(b)所示。该条件可用于评估变流器失去平衡点的风险, 即变流器的稳定裕度。

本章利用第3章的奇异点计算方法, 将变流器看作电流源设备, 针对故障切除后一段时间内的每个时刻计算变流器的电流幅值裕度, 然后取所关心的变流器母线的计算时刻中的最小值作为指标 C_M 的值。与负荷功率裕度指标 L_M 相似, 在功角摆开过程中, 将电源节点当作 $V\theta$ 母线计算指标 C_M 。

5.3.2 耦合强度评估指标

为了量化两种失稳形态的耦合强度, 提出发电机和负荷之间的交互强度指标 y_1 、 z_1 与暂态网络传输能力指标 y_2 、 z_2 。

5.3.2.1 同步发电机与动态负荷的耦合强度评估指标

记 η 关于故障前动态负荷功率的灵敏度为 $d\eta_y$, 其计算如(5-22)所示。 S_L 关于故障前发电机输出有功的灵敏度为 dS_L , 计算式与(5-22)类似, 其分母为发电机输出有功变化量, 分子为负荷稳定指标 S_L 的变化量。

$$d\eta_y = \frac{\Delta\eta}{\Delta P_L} \times 100 \quad (5-22)$$

式中 ΔP_L ——故障前负荷功率变化量;

$\Delta\eta$ ——对应的功角稳定性量化评估指标变化量。

基于第4章 4.2.2.1 节中发电机与动态负荷强耦合的机理分析, 定义发电机和负荷之间的交互强度指标 y_1 如下:

$$y_1 = d\eta_y \times dS_L \quad (5-23)$$

根据仿真经验, 在本章中定义 $|y_1| < 0.1$ 为极弱的交互作用, $|y_1| \in [0.1, 0.3]$ 为较弱的交互作用, $|y_1| \in (0.3, 1]$ 为较强的交互作用, $|y_1| > 1$ 为很强的交互作用。

当发电机功角摆开时, 网络传输能力下降。如果动态负荷距离奇异点的功率裕度很小, 那么系统也很容易出现功角、电压失稳强耦合。所以定义暂态网络传输能力指标 y_2 如下:

$$y_2 = L_M / V_{CPI} \quad (5-24)$$

在本章中定义, 当 $y_2=0$ 时, 系统已经发生与奇异点相关的失稳。当 $|y_2| \in (0,1]$ 时, 网络的功率传输能力极差, 极易发生或已经发生暂态功角、电压失稳; 当 $|y_2| \in (1,10]$, 网络的功率传输能力较差, 抗干扰能力很弱; 当 $|y_2| \in (10,100]$, 功率传输能力一般, 系统比较稳定, 但存有潜在的失稳风险, 当功角摆开较大时可能因为引起负荷失稳; 当 $|y_2| > 100$, 系统通常处于轻载的情况, 网络的功率传输能力很强, 稳定裕度较高。当电压功角耦合较强时, 单一的功角稳定与电压稳定的分析很可能不准确, 就有必要进一步对主导性进行判别, 以优化稳定控制措施。

5.3.2.2 同步发电机与变流器的耦合强度评估指标

记 η 关于故障前变流器输出功率的灵敏度为 $d\eta_z$ (单位为 p.u./(100MW)), S_V 关于故障前发电机输出有功的灵敏度为 dS_V (单位为 p.u./(100MW)), 定义发电机和变流器之间的交互强度指标 z_1 如下:

$$z_1 = d\eta_z \times dS_V \quad (5-25)$$

根据仿真经验, 在本章中定义 $|z_1| < 0.1$ 为极弱的交互作用, $|z_1| \in [0.1, 0.3]$ 为较弱的交互作用, $|z_1| \in (0.3, 1]$ 为较强的交互作用, $|z_1| > 1$ 为很强的交互作用。

根据第 4 章 4.2.2.2 节和 4.3 节, 当发电机功角摆开时, 如果变流器距离奇异点的功率裕度很小, 那么系统也很容易出现功角、电压强耦合。所以定义含变流器的暂态网络传输能力指标 z_2 如下:

$$z_2 = C_M / V_{CPI} \quad (5-26)$$

由于 C_M 指标被标么化, z_2 的范围与 y_2 不同。在本章中定义, 当 $z_2 \leq 0$ 时, 系统已经发生与奇异点相关的失稳; 当 $|z_2| \in (0, 0.01]$ 时, 网络的功率传输能力极差, 极易发生或已经发生暂态功角、电压失稳; 当 $|z_2| \in (0.01, 0.1]$, 网络的功率传输能力较差, 抗干扰能力很弱; 当 $|z_2| \in (0.1, 0.5]$, 功率传输能力一般, 系统比较稳定, 但存有潜在的失稳风险, 功角摆开较大时可能因为引起负荷失稳; 当 $|z_2| > 0.5$, 变流器注入功率较低或者系统处于轻载的情况, 网络的功率传输能力很强, 稳定裕度较高。

5.4 算例分析

5.4.1 功角电压近似解耦场景识别

5.4.1.1 同步发电机与动态负荷之间功角、电压近似解耦

采用图 5-1 所示的 3 节点系统在 PSCAD/EMTDC 上进行仿真研究。负荷采用 100%异步电动机模型, 其参数根据 IEEE-1 类电动机典型参数设置^[169], 电动机模型仿真参数见表 5-2, 其中 A、B、C 表示机械转矩系数。电动机基准容量 100MW, 仿真过程中通过修改同调电动机的数量来实现不同的负荷功率大小。发电机基准容

量 500MW，其参数值如表 5-3 所示。网络参数的基准容量为 100MW。1s 时刻于发电机出口处发生三相短路故障，短路电阻 0.01Ω 。尽管系统几乎同时表现出暂态电压失稳和功角失稳，但分析表明仍然以单一的功角失稳为主导。

表 5-2 电动机仿真模型参数（标么值）

Table 5-2 Parameters of motor simulation model(p.u.)

参数名称	值	参数名称	值	参数名称	值	参数名称	值
R_s	0.0288	X_s	0.0948	X_m	2.9614	T_j	3.4(s)
R_r	0.0109	X_r	0.1000	A	0.85	B	0
C	0.15						

表 5-3 发电机的仿真模型参数表（标么值）

Table 5-3 Parameters of the generator simulation model(p.u.)

参数名称	值	参数名称	值	参数名称	值	参数名称	值
R_a	0.002	X_l	0.13	X_d''	0.22	T_{q0}''	0.034(s)
X_d	1.0	X_q	1.0	T_{d0}'	9(s)	T_j	1.7(s)
X_d'	0.3	X_q''	0.29				

按照前面的网络结构分类，这是一个 CS 类型，网络参数见表 5-1 第 1 行，仿真轨迹在 δ_g - P_3 平面上的投影如图 5-4 所示。对不同故障时长进行了仿真，并计算了 4 个稳定指标，以反映系统稳定性的变化趋势，结果详见表 5-4。

表 5-4 指标计算结果

Table 5-4 Index calculation result

No.	t_f	η	S_L	V_{CPI}	L_M
1	0.380	0.134	0.353	1.546	300.338
2	0.384	0.120	0.331	1.545	298.318
3	0.386	0.103	0.298	1.545	298.376
4	0.387	-0.015	0.044	1.709	153.658
5	0.388	-0.015	0.044	1.709	154.574
6	0.390	-0.077	0.061	1.596	201.248

在表 5-4 中 t_f 表示故障持续时间，在后文中 t_f 都表示相同的意思。根据表中的指标计算结果，随着故障时间的增加，系统由扰动后恢复稳定转变成扰动后失稳， η 从正变负，但 S_L 始终大于 0，所以系统的失稳形态是功角失稳。如果仅仅从系统的负荷母线电压幅值曲线、功角曲线来看，系统功角摆开和电压下跌几乎同时出现，如图 5-14 a) 所示。但从图 5-14 b) 电动机的滑差曲线可以看出，电动机并没有失稳，而是过渡到了新的稳定状态。

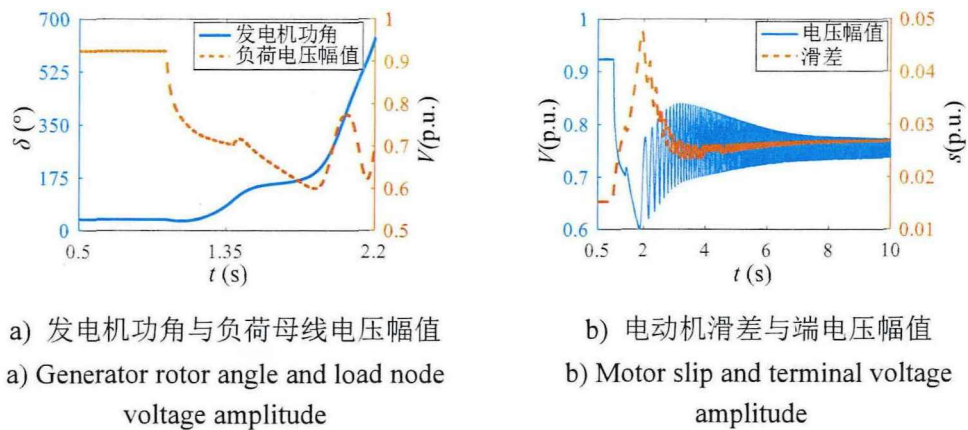


图 5-14 发电机和电动机的仿真曲线(故障时长 0.387 秒)

Fig.5-14 Simulation curves for generators and motors ($t_f = 0.387$)

根据表 5-5 中耦合强度指标 y_1 和 y_2 的计算结果。 y_1 值较小, 表明故障持续时间较短时, 发电机与负荷几乎没有交互; 在临界切除时间附近, 两者有较弱的交互作用。 y_2 值较大, 除了临界切除时间附近, 其他情况下 y_2 值都大于 100, 说明系统的功率传输能力很强, 系统也并未因为奇异点而出现电压和功角的相互影响, 也与上述功角失稳为主导的分析结论一致, 仿真分析与指标计算结果相吻合。

表 5-5 耦合强度量化指标计算结果

Table 5-5 Coupling strength quantitative index calculation results

No.	t_f	y_1		y_2	
		值	等级	值	等级
1	0.380	0.008	极弱	194.297	很强
2	0.384	0.013	极弱	193.041	很强
3	0.386	0.024	极弱	193.149	很强
4	0.387	0.197	较弱	89.913	一般
5	0.388	0.194	较弱	90.449	一般
6	0.390	0.193	较弱	126.106	很强

5.4.1.2 同步发电机与变流器之间功角、电压近似解耦

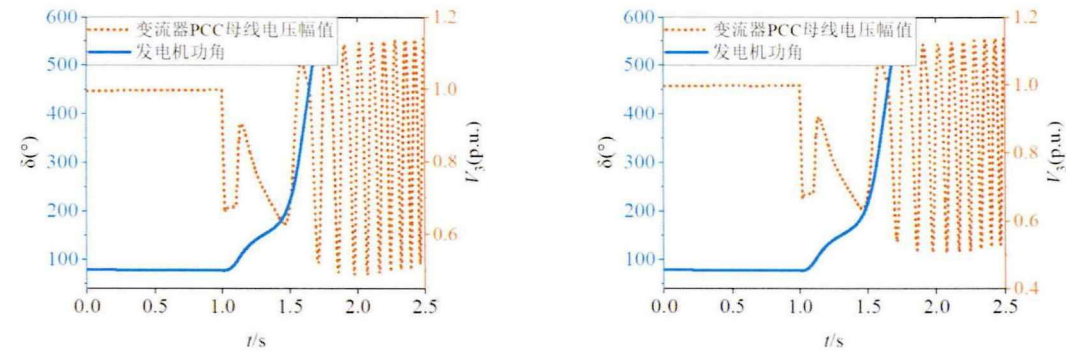
如图 5-10 a)所示, 当变流器非常靠近大系统时, 系统中的变流器母线电压、同步发电机功角近似解耦。同样对不同故障时长进行了仿真, 其稳定指标计算结果如表 5-6 所示。当故障持续时间增加到 0.1 秒时, 指标值 $\eta < 0$, 系统发生失稳。计算指标 S_V 时选择阈值 $V_{th1} = 0.707$, $V_{th2} = 0.8$, $T_{cr} = 3$ 。选择较小的阈值 V_{th1} 使得母线电压振荡幅值较高时不会被直接判断为电压失稳, 判断结果偏保守, 但也使得电压振荡且 $S_V > 0$ 时不能直接判断电压稳定。

表 5-6 指标计算结果

Table 5-6 Index calculation result

No.	t_f	η	S_V	V_{CPI}	C_M
1	0.080	0.182	0.859	0.833	1.812
2	0.090	0.133	0.806	0.761	1.494
3	0.099	0.105	0.750	0.750	1.269
4	0.100	-0.144	0.260	1.350	0.147

变流器和发电机的仿真曲线如图 5-15 所示。为了比较变流器对发电机功角稳定的影响，在变流器 PCC 母线处并联了 159.7MW 的负荷电阻。当减少变流器输出电流使得变流器输出功率从 421.1MW 减少到 364.9MW 时，并联负荷电阻从 159.2MW 减少到 103MW，以保持发电机母线电压和发电机出力不变。比较图 5-15 a)和 b)，变流器出力变化对系统功角失稳和电压振荡几乎没有影响，也说明这是一个功角失稳引起电压振荡的算例。



a) 变流器输出有功 421.1 MW

b) 变流器输出有功 364.9 MW

a) Converter output active power 421.1 MW

b) Converter output active power 364.9 MW

图 5-15 发电机和变流器 PCC 母线的仿真曲线 (故障时长 0.1 秒)

Fig. 5-15 Simulation curves for generators and converters PCC bus ($t_f=0.1$)

表 5-7 耦合强度量化指标计算结果

Table 5-7 Coupling strength quantitative index calculation results

No.	t_f	z_1		z_2	
		值	等级	值	等级
1	0.080	0.000	极弱	2.175	很强
2	0.090	0.001	极弱	1.964	很强
3	0.099	0.003	极弱	1.692	很强
4	0.100	-0.007	极弱	0.109	一般

根据表 5-7 中耦合强度指标 z_1 和 z_2 的计算结果，也符合上述仿真曲线的现象。指标值 z_1 接近于 0，说明无论是变流器的功率调节对同步发电机的功角稳定性影响，还是同步发电机的功率调节对变流器的母线电压的影响，变流器与同步发电机之间的影响都很弱。指标 z_2 表明网络的功率传输能力维持在“很强”与“一般”的水平，

距离奇异点有足够的安全距离，同样表明该场景下功角电压近似解耦。因此，耦合轻度量化指标 z_1 与 z_2 从两个维度能够正确识别功角、电压失稳解耦的场景。

5.4.2 功角电压耦合失稳场景识别

5.4.2.1 三节点系统算例

基于第 4 章的耦合机理分析，由于发电机稳态功率、负荷功率和网络参数不同，系统呈现出以下两种失稳模式：a) 发电机与电动机负荷强交互引起的失稳；b) 奇异点引起的失稳。

(1) 发电机与电动机负荷强交互现象与耦合强度计算

根据第 5.2.2.1 节的分析，在 CC 网络中，同步发电机与电动机负荷更容易发生交互，恶化暂态功角稳定与暂态电压稳定。所以针对不同故障持续时间，对表 5-1 第 4 行的网络进行了仿真与指标计算，结果见表 5-8。

表 5-8 指标计算结果

Table 5-8 Index calculation result					
No.	t_f	η	S_L	V_{CPI}	L_M
1	0.190	0.266	0.323	1.907	77.113
2	0.194	0.241	0.279	1.925	60.976
3	0.198	0.224	0.197	2.004	47.611
4	0.200	0.198	-1.00	2.245	25.928
5	0.202	-0.042	-1.00	2.574	3.997
6	0.210	-0.154	-1.00	2.409	4.424

表 5-9 修改惯性时间常数后的指标计算结果

Table 5-9 Index calculation result after changing the inertia time constant

No.	t_f	η	S_L	V_{CPI}	L_M
1	0.200	0.260	0.310	1.936	69.848
2	0.202	0.234	0.290	1.866	70.596

当 $t_f=0.2s$ 时，系统已经发生暂态电压失稳，但功角没有失稳，如图 5-16a)所示。发电机功角的增大，造成电动机端电压下降，促使电动机更容易失稳。可以通过提高发电机的惯性时间常数来验证发电机摆开对负荷的强影响。如图 5-16 b)所示，将发电机的时间常数从 1.7s 增加到 2s，在 0.2s 故障时长下，电动机能恢复稳定，系统没有发生暂态电压失稳。增加发电机惯量常数后的指标计结果见表 5-9 第一行。

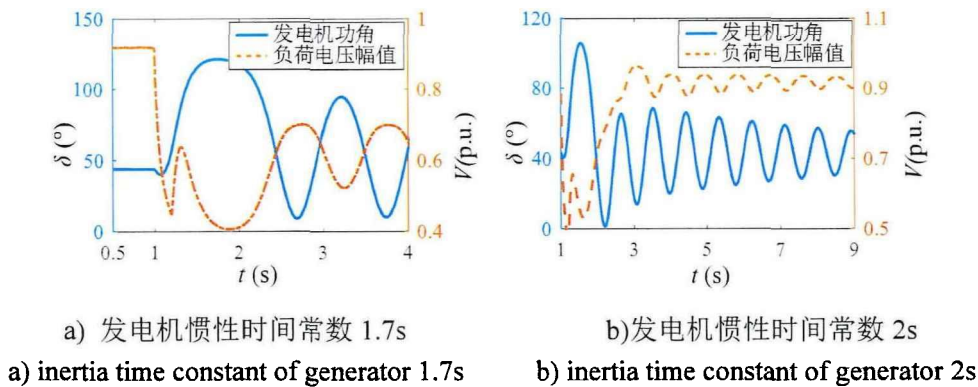


图 5-16 发电机功角与负荷母线电压幅值(故障时长 0.2 秒)

Fig. 5-16 Generator rotor angle and load node voltage amplitude ($t_f=0.2$)

当故障时长增加到 0.202s 时，系统同时发生暂态功角失稳与暂态电压失稳，如图 5-17a)所示。电动机失稳减少了发电机的减速面积，使得发电机更容易失稳。可以通过提高电动机的惯性时间常数来验证负荷对发电机暂态过程的强影响。如图 5-17b)所示，将电动机的惯性时间常数从 3.4s 增加到 4s，系统可以维持稳定，说明电动机与发电机之间的耦合促使发电机失步。增加电动机惯性时间常数之后的指标计算结果见表 5-9 第 2 行。

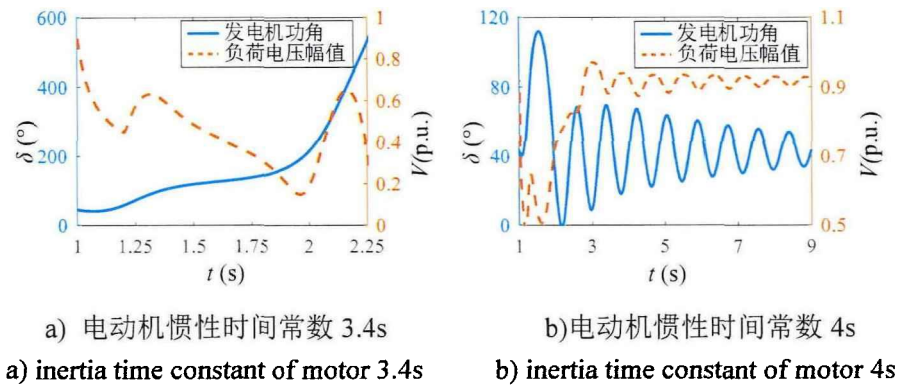


图 5-17 发电机功角与负荷母线电压幅值(故障时长 0.202 秒)

Fig. 5-17 Generator rotor angle and load bus voltage amplitude ($t_f=0.202$)

表 5-10 耦合强度量化指标计算结果

Table 5-10 Coupling strength quantitative index calculation results

No.	t_f	y_1		y_2	
		值	等级	值	等级
1	0.190	0.116	较弱	40.528	一般
2	0.194	0.151	较弱	31.541	一般
3	0.198	0.327	较强	23.586	一般
4	0.200	6.117	很强	9.688	较差
5	0.202	10.925	很强	1.595	较差
6	0.210	10.128	很强	2.587	较差

耦合交互强度指标 y_1 和 y_2 的计算结果见表 5-10。随着故障持续时间的延长, y_1 指标增大, 发电机与负荷之间的交互强度迅速加强, 与图 5-16b)和图 5-17b)的仿真分析相吻合, 说明耦合强度指标中 y_1 能够识别出发电机与负荷在故障后强交互的情形。 y_2 在系统失稳的情况下变小, 网络的功率传输能力变差, 说明再继续增加负荷就有可能发生奇异点诱发的耦合失稳。

(2) 动态负荷相关奇异点引起的失稳现象与功角电压耦合强度计算

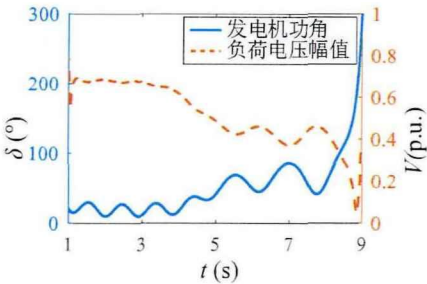
根据第 5.2.2.1 节的分析, 在 CC 网络中, 特别当负荷重载时, 系统容易发生奇异点引起的耦合失稳, 所以在耦合失稳算例 (1) 的基础上增加负荷功率, 对重载的情况进行仿真, 稳定指标计算结果见表 5-11。

表 5-11 指标计算结果

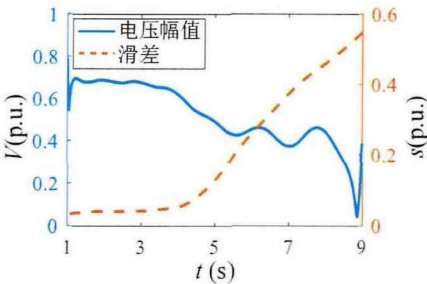
Table 5-11 Index calculation result

No.	t_f	η	S_L	V_{CPI}	L_M
1	0.030	0.742	0.481	2.733	99.978
2	0.040	0.723	0.278	3.260	66.634
3	0.041	0.723	0.281	3.260	66.611
4	0.042	0.723	0.284	3.260	66.653
5	0.043	-0.642	-0.997	4.36×10^5	0.000
6	0.045	-0.642	-0.997	4.36×10^5	0.000

根据表 5-11, $t_f=0.043$ 时, V_{CPI} 达到了 4.36×10^5 , $L_M=0$, 发电机与负荷电压同时发生失稳, 如图 5-18 所示。根据图 5-19 中的 V_{CPI} 曲线, 在 4.868 秒时, 系统的代数方程雅克比矩阵 J_{alg} 奇异, 仿真遇到了奇异点, 系统的功率传输特性与负荷特性不协调。此时, 发电机功角为 34 度, 大于 $t_f=0.042$ 时功角摆开的最大角度(28.9°)。随后负荷电压持续下跌, 发电机失步。同时, 仿真轨迹 δ_g-P_3 平面上的投影如图 5-7 所示, 系统的失稳轨迹几乎与奇异点构成的稳定边界重合, 也证明了系统的暂态电压和暂态功角的耦合与奇异点有关。



a) 发电机功角与负荷母线电压幅值



b) 电动机滑差与端电压幅值

a) Generator rotor angle and load node voltage amplitude

b) Motor slip and terminal voltage amplitude

图 5-18 发电机和电动机的仿真曲线 (故障时长 0.043 秒)

Fig. 5-18 Simulation curves for generators and motors ($t_f = 0.043$)

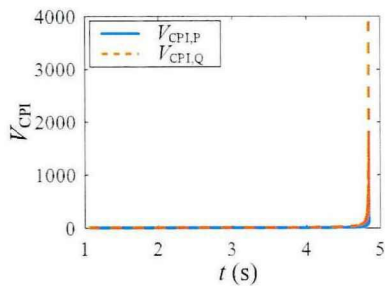


图 5-19 V_{CPI} 曲线(故障时长 0.043 秒)

Fig. 5-19 V_{CPI} curve ($t_f=0.043$)

如表 5-12 所示，发生耦合失稳时，发电机与负荷之间的交互强度很强；在其他 t_f 值下，两者之间几乎没有交互作用。而随着故障持续时间的延长， y_2 减小，网络传输能力降低到较低水平。在 $t_f=0.043$ 时， y_2 突然降为 0。系统表现出“突然”失稳的现象，如第 4 章 4.2.2.2 节所述，这也是代数方程奇异引起失稳的特点。

表 5-12 耦合强度量化指标计算结果

Table 5-12 Coupling strength quantitative index calculation results

No.	t_f	y_1		y_2	
		值	等级	值	等级
1	0.030	0.000	极弱	36.581	一般
2	0.040	0.001	极弱	20.442	一般
3	0.041	0.001	极弱	20.435	一般
4	0.042	0.001	极弱	20.448	一般
5	0.043	7.586	很强	0.000	失稳
6	0.045	7.588	很强	0.000	失稳

(3) 变流器相关奇异点引起的失稳现象与功角电压耦合强度计算

在本章第 5.2.2.2 节的分析中，图 5-10 b)描述了一种功角电压近似解耦的场景：变流器靠近发电机且变流器输出电流较小。图 5-10 b)中的系统轨迹非常接近于奇异点，本算例在图 5-10 b)的场景基础上增加变流器的输出电流，以说明含变流器网络的耦合场景与解耦场景的区别。针对不同故障持续时间进行仿真与指标计算，结果见表 5-13。根据表 5-13，当 t_f 大于 0.349 秒时， $\eta<0$ 系统失稳，仿真曲线如图 5-20 a)所示。计算指标 S_V 时选择阈值 $V_{th1}=0.707$ ， $V_{th2}=0.8$ ， $T_{cr}=3$ 。对电压振荡的情形，较低的阈值使得 S_V 的判断偏保守，但其数值仍然可以衡量系统电压水平的高低。

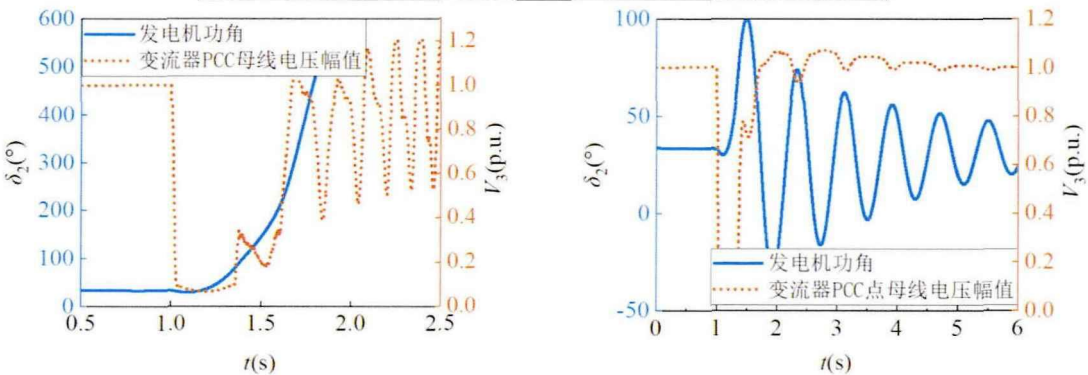
在这种场景下，微调变流器输出电流或者同步发电机的初始功率也能够对系统稳定性带来很明显的变化。变流器 PCC 母线并联阻抗型负荷功率 59.8MW，当减少变流器输出电流使得输出功率从 230.7MW 减少到 225MW（减少 2.5%）时，变流器 PCC 母线并联负荷也减少到 5.7MW，这样可以保持发电机初始输出功率和母线电压不变。微调变流器输出电流后的其仿真曲线如图 5-20 b)所示，稳定指标计算结果

如表 5-14 的第一行所示，其功角和电压都能在这种条件下恢复稳定。

表 5-13 指标计算结果

Table 5-13 Index calculation result

No.	t_f	η	S_V	V_{CPI}	C_M
1	0.340	0.179	0.734	0.971	4.280
2	0.345	0.117	0.653	1.060	2.654
3	0.348	0.117	0.654	1.061	2.654
4	0.349	-0.840	0.393	5.195	0.228
5	0.35	-0.840	0.393	5.024	0.230



a) 变流器输出有功功率 230.7MW

b)变流器输出有功功率 225MW

a) Converter output active power 230.7MW

b) Converter output active power 225MW

图 5-20 发电机和变流器 PCC 母线电压的仿真曲线 (故障时长 0.349 秒)

Fig. 5-20 Simulation curves for generators and converters PCC bus voltage ($t_f=0.349$)

如果继续调节变流器输出电流同时调节阻抗型负荷功率以保持同步发电机的初始状态不变，将变流器的功率减少到 174.3MW（对应于图 5-10b)的场景），稳定指标计算值如表 5-14 中第 2 行所示。指标数值与第 1 行相比， η 与 S_V 和 C_M 的数值增大、 V_{CPI} 的数值减小反应系统稳定性提升。这说明在这种耦合场景下，变流器输出功率的减少确实能改善系统的功角稳定与电压稳定。微调同步发电机的初始功率也能使故障后功角和电压恢复稳定。当同步发电机的初始输出功率从 225.8MW 减少到 217.6MW（减少 3.6%），故障后功角与母线电压都能恢复稳定。仿真曲线与图 5-20b)相似，稳定指标计算结果见表 5-14 第 3 行所示。

表 5-14 修改初始有功出力后指标计算结果

Table 5-14 Index calculation results after modifying initial active output

No.	t_f	η	S_V	V_{CPI}	C_M	备注
1	0.349	0.099	0.621	1.136	2.087	$P_3=225$
2	0.349	0.154	0.710	0.971	3.988	$P_3=174.3$
3	0.349	0.207	0.800	0.957	4.846	$P_2=217.6$

以上的仿真分析都证明了同步发电机与变流器之间的耦合作用。根据所提出的耦合强度量化评估指标计算方法，得到的计算结果如表 5-15 所示。当 t_f 增大到超过

临界切除时间 0.348 时, z_1 显著增大到“很强”的耦合水平, z_2 减小到几乎为 0, 网络功率传输方程遇到“奇异点”。

表 5-15 耦合强度量化指标计算结果

Table 5-15 Coupling strength quantitative index calculation results

No.	t_f	z_1		z_2	
		值	等级	值	等级
1	0.34	0.007	极弱	4.407	较高
2	0.345	0.152	较弱	2.504	一般
3	0.348	0.153	较弱	2.501	一般
4	0.349	8.752	很强	0.044	极差
5	0.35	8.117	很强	0.046	极差

稳定指标 V_{CPI} 与 C_M 随时间变化的曲线, 还可以进一步地反应出轨迹遇到“奇异点”的时间。如图 5-21 所示, V_{CPI} 与 C_M 都在 1.527 秒附近达到极值, 系统轨迹在该时刻越过“奇异点”附近。

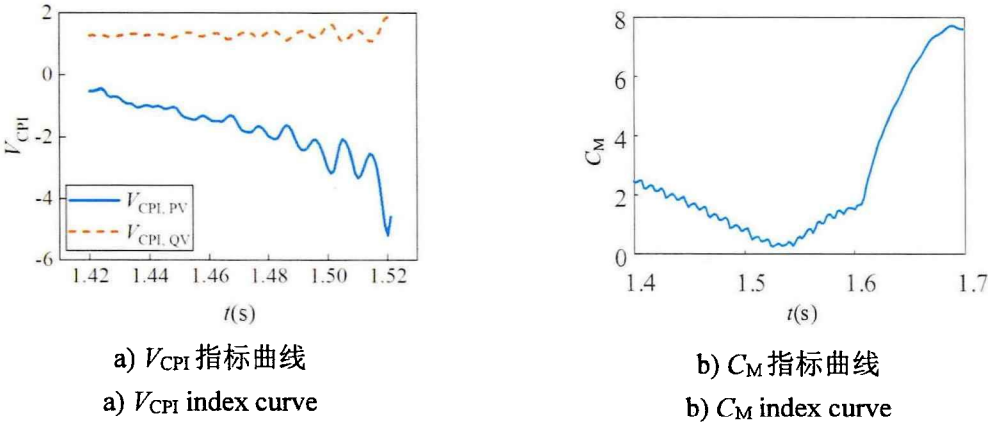


图 5-21 耦合强度量化指标 z_2 中的 V_{CPI} 与 C_M 指标曲线 ($t_f=0.349$ 秒)

Fig. 5-21 The curve of V_{CPI} and C_M indexes in coupling strength quantitative index $Z_2(t_f=0.349)$

5.4.2.2 IEEE39 系统算例：电动机负荷

(1) 算例说明

通过 IEEE 的 39 系统仿真, 网络单线图如附录 B 中图 B-1 所示, 在多机系统下验证本章提出的耦合强度量化评估指标的有效性。1 秒时刻母线 27 发生瞬时三相短路故障, 临界割集如图 B-1 中红色虚线 C_1 和绿色虚线 C_6 所示。

(2) 仿真分析与耦合强度计算

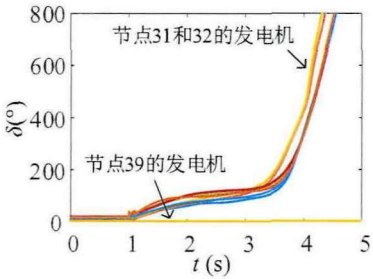
通过多次数值计算找到故障的临界切除时间范围在 0.09s 与 0.1s 之间, 然后在这个故障时长区间内计算稳定指标, 如表 3-17 所示。指标 S_L 和 L_M 都对负荷母线 8 和 15 分别计算, 表 5-16 中的数值为两母线中的最小值。根据表 3-17 的结果, 当 $t_f \geq 0.098$ 时, 母线 39 的发电机与其他发电机失步, 导致母线电压大幅振荡, 如图 5-22

a)和图 5-22 b)所示，暂态功角失稳和暂态电压失稳几乎同时发生。根据 V_{CPI} 曲线和 L_M 曲线，系统轨迹在 3.609 秒时刻遇到奇异点， V_{CPI} 达到 4.4。 L_M 曲线见第 3 章图 3-12a)。

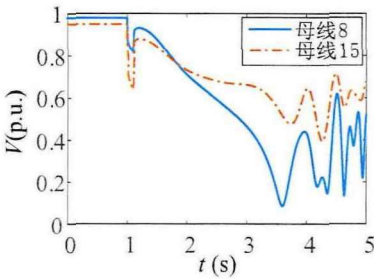
表 5-16 指标计算结果

Table 5-16 Index calculation result

No.	t_f	η	S_L	V_{CPI}	L_M
1	0.09	0.122	0.282	1.484	264.411
2	0.095	0.110	0.256	1.482	223.690
3	0.098	-0.024	-0.984	4.406	0.000
4	0.099	-0.024	-0.984	4.419	0.000
5	0.1	-0.024	-0.984	4.419	0.000
6	0.101	-0.246	-0.985	2.849	0.000



a) 发电机功角曲线



b) 负荷母线电压曲线

a) Generator rotor angles

b) load node voltage amplitude

图 5-22 发电机和电动机的仿真曲线 (故障时长 0.098s)

Fig. 5-22 Simulation curves for generators and motors ($t_f=0.098$)

表 5-17 耦合强度量化指标计算结果

Table 5-17 Coupling strength quantitative index calculation results

No.	t_f	y_1			y_2	
		y_{1_8}	y_{1_15}	等级	值	等级
1	0.09	0.000	0.000	极弱	178.157	很强
2	0.095	0.000	0.001	极弱	150.893	很强
3	0.098	1.892	2.475	很强	0.000	失稳
4	0.099	1.892	2.475	很强	0.000	失稳
5	0.1	1.892	2.475	很强	0.000	失稳
6	0.101	0.604	0.638	较强	0.000	失稳

耦合强度的指标计算结果如表 5-17 所示。其中， y_{1_8} 和 y_{1_15} 分别表示根据负荷母线 8 和 15 各自的 S_L 值计算的耦合强度 y_1 值。这两个负荷母线分别靠近临界割集 C_1 和 C_6 ，都与系统中的发电机强耦合。根据表 5-16 与表 5-17 的结果，系统的失稳与奇异点有关。但是与三节点中的奇异点引起的耦合模式不同的是，当系统轨迹遇到奇异点的时刻，发电机功角已经摆开到较大的位置，其中母线 31 和 32 的发电机

已经摆过 180 度, 负荷母线电压也同时降到很低的水平, 母线 8 的电压降到了 0.09p.u.。由此看来, 负荷与发电机的耦合作用在先, 然后才是奇异点加速了系统的失稳。

为了验证负荷与发电机的耦合作用, 在几乎不改变稳态运行工况的情况下, 降低发电机功率, 或者改变负荷参数。例如, 在 $t_f=0.1$ 的情况下, 把母线 38 的发电机稳态功率降低 1% (从 904MW 降低到 895MW), 故障后系统恢复稳定, 如表 5-18 第 1 行的稳定指标计算结果所示。如果从负荷的角度, 略微降低负荷母线 8 (或者母线 15) 的电动机负荷占比, 将其中 21MW 的动态负荷替换为恒阻抗型负荷, 故障后系统也能恢复稳定, 如表 5-18 中第 2 行和第 3 行所示。

表 5-18 修改参数后的指标计算结果

Table 5-18 Index calculation result after changing parameters						
母线	t_f	η	S_L	V_{CPI}	L_M	备注
38	0.1	0.099	0.184	1.516	145.942	$P_3=895$
8	0.1	0.061	0.058	1.604	15.633	降电动机比例
15	0.1	0.071	0.097	1.535	79.756	降电动机比例

5.4.2.3 IEEE39 系统算例：变流器

(1) 算例说明

在含多个变流器的 IEEE39 系统中验证本章提出的耦合强度量化评估指标的有效性, 网络单线图如附录 B 中图 B-2 所示。0 秒时刻母线 14 发生瞬时三相短路故障, 失稳初期临界割集如中图 B-2 红色虚线 C_1 所示。

(2) 仿真分析与耦合强度计算

各个故障持续时间下的稳定指标如表 5-19 所示。故障持续时间在 0.165 秒和 0.167 秒之间时, 稳定指标 $\eta \geq 0$, $S_V < 0$, 表示电压失稳和发电机功角稳定。故障持续时间达到 0.167 秒之后, 功角和电压同时失稳, 仿真曲线如图 5-23 所示。

表 5-19 指标计算结果

Table 5-19 Index calculation result					
No.	t_f	η	S_V	V_{CPI}	C_M
1	0.16	0.189	0.534	1.818	0.931
2	0.164	0.165	0.468	1.984	0.823
3	0.165	0.000	-0.116	4.507	0.044
4	0.166	0.000	-0.115	4.551	0.014
5	0.167	-0.330	-0.822	2796.462	0.127
6	0.168	-0.330	-0.822	62.772	0.043

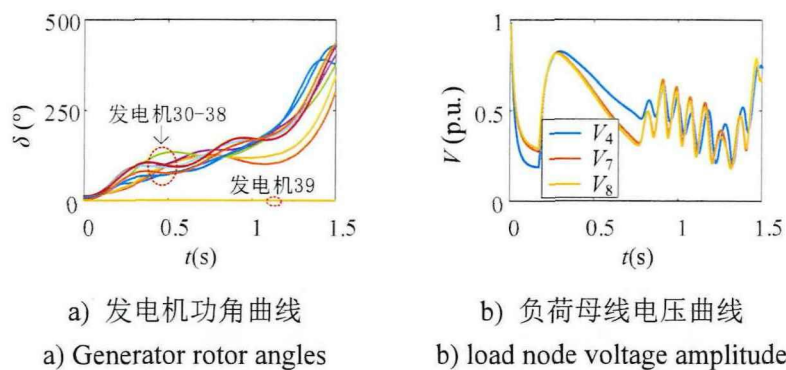


图 5-23 发电机功角和电压幅值曲线 (故障时长 0.167)

Fig.5-23 Simulation curves for generators and motors ($t_f=0.167$)

耦合强度的指标计算结果如表 5-20 所示。计算结果表明,在故障持续时间 0.165 秒时,该场景已经达到功角和电压稳定的强耦合。这是一种新现象,在第 3 章 3.5.4.2 节和第 4 章 4.3.5.3 节中都进行过算例分析。在第 3 章中计算了该条件下裕度指标 C_M ,约 1.22 秒时轨迹穿过奇异点,如图 3-14 所示。在第 4 章中分析了变流器失稳反而功角恢复的机理。在第本章中的网络结构与耦合场景的分析中,该场景属于“变流器靠近同步发电机”的类型,如图 5-9 所示。因此,耦合强度评估指标与第 3 章、第 4 章的计算方法、机理分析相互验证了正确性。

表 5-20 耦合强度量化指标计算结果

Table 5-20 Coupling strength quantitative index calculation results

No.	t_f	z_1		z_2	
		值	等级	值	等级
1	0.16	0.000	极弱	0.512	很强
2	0.164	0.003	极弱	0.415	一般
3	0.165	1.259	较强	0.010	极差
4	0.166	1.259	较强	0.003	极差
5	0.167	0.842	较强	0.000	失稳
6	0.168	0.850	较强	0.001	极差

5.5 本章小结

本章基于保留发电机与电动机、变流器特征的系统模型,研究了暂态电压与暂态功角的耦合场景的识别问题。通过对比分析不同网络结构下的失稳模式,提取了网络结构与耦合失稳场景之间的关系,然后基于功角稳定性与电压稳定性评估指标,提出了耦合强度的定量评估方法。本章结论如下:

(1) 理论分析和仿真表明,典型的送端、受端模型以及负荷远离电源的情形,不容易发生功角与电压的耦合失稳,失稳模式比较容易判别;而电动机、变流器等动态设备与同步发电机功角失稳时临界割集具有较紧密的电气连接的场景,是发生

耦合失稳模式的主要网络结构。在这种结构下,临界割集区域的设备与发电机的交互作用较强;受发电机功角摆开的影响,临界割集处设备动态的细微改变也可能引起网络的功率传输能力的明显变化,对稳定性分析的结构有很大的影响。因此,在这种网络结构下,暂态功角稳定性的分析不能忽视临界割集附近负荷、变流器的动态过程;暂态电压稳定的分析也不能忽视发电机的动态过程。

(2) 本章提出了分析耦合失稳过程的指标体系以及评估两种耦合类型的强度量化指标。基于子系统不稳定平衡点附近的强交互作用及奇异点附近的耦合机理,提出了对应的两类耦合强度的量化指标 y_1 、 z_1 与 y_2 、 z_2 。通过仿真算例,分别在非耦合情况下、两种不同的耦合情况下以及多机系统的情况下,验证了耦合机理分析的正确性与指标体系的合理性。同时,理论分析和仿真结果表明,当两种稳定形态耦合性较强时,有必要进一步分析系统的主导稳定性模式。稳定指标体系与耦合强度指标使得耦合特性具有可量化性,为后续主导失稳模式的识别与优化控制措施提供参考。

第6章 结论与展望

6.1 结论

本文围绕电力系统中功角失稳与电压失稳的检测方法与耦合机理分析展开研究。首先,针对功角、电压稳定的在线检测,分别提出了快速检测方法;然后,研究同步发电机功角与电动机、变流器出口母线电压的耦合失稳机理;最后,基于耦合机理构建了耦合强度评估指标,提出了耦合场景的识别方法。本文主要研究成果和创新点如下:

(1) 利用暂态能量在网络支路上的分布特征,提出了考虑负荷暂态能量与割集支路势能的功角失稳在线检测方法

基于电力系统暂态功角失稳过程中的能量特征,通过理论分析证明了两个结论:利用割集势能判断功角失稳在时间上晚于轨迹穿过稳定边界时刻;临界割集并非失稳判据的必要条件。通过计及负荷暂态能量对应的负荷等值功率可以更早地判断功角失稳,通过非临界割集支路功率可以拓展失稳判据的使用条件。因此,提出了负荷等值功率的三种估算方法:基于负荷功率量测、割集选择和临界割集量测。所提方法利用网络结构特征,以较少的在线信息传递实现了更早的功角失稳检测。

(2) 综合分岔点直接法与连续潮流法,提出了电压稳定临界点的快速计算方法

基于电压稳定临界点的性质提出了鞍结型分岔点逼近指标,该指标的线性特性可以有效评估当前运行点距离鞍结型分岔点的距离。基于该指标,提出了连续潮流与分岔点直接法的切换策略,避免了分岔点附近连续潮流法计算量增加以及为分岔点直接法提供了较好的计算初值。提出了分岔点类型识别的补逻辑,解决了大步长连续潮流计算过程中节点类型转化的问题。提出了分岔点直接法中海森矩阵的隐式计算方法,提高了分岔点直接法的计算效率。所提计算方法综合了直接法与连续潮流法两者的优势,实现了既快又准地计算电压稳定临界点。

(3) 通过功角、电压子系统分解分析了同步发电机与电动机的交互机理;通过几何奇异摄动理论揭示了同步发电机与锁相环之间的交互机理

提出功角-电压子系统分解模型,在子模型中保留了功角稳定和电压稳定各自的特征。通过分析功角、电压子系统之间的相互影响,揭示了同步发电机与电动机负荷之间耦合的两种机制:同步发电机功角与电动机等值电导在子系统不稳定平衡点附近的强交互作用,网络传输能力不足表现出来的轨迹遇到奇异点后失稳。

建立了同步发电机-锁相环系统模型,通过奇异摄动理论分析了同步发电机和锁相环系统之间交互的动力学机制,通过同伦分析法解析了奇异点附近的发电机转速

表达式,揭示了锁相环对发电机同步稳定性的两种影响机理:锁相环失稳短暂地增加同步发电机的减速面积导致发电机功角减速;锁相环失稳增加同步发电机加速面积导致发电机功角快速失稳。

(4) 基于功角/电压的耦合失稳机理,借助功角稳定与电压稳定的量化评估指标,提出了功角电压耦合强度评估指标

基于奇异点附近功角/电压的交互模式,提出了考虑网络结构和负荷水平的功角/电压耦合失稳场景分类方法,得到功角/电压强耦合的典型物理场景:电动机、变流器等动态设备与同步发电机功角失稳时临界割集的电气距离较近的场景。基于稳定裕度与距离奇异点裕度的量化指标,构造了功角/电压稳定性的评估指标体系,基于这些指标之间的灵敏度关系和比值关系分别定义了两类耦合强度指标,提出了耦合场景的识别方法。所提出的方法可以有效识别功角电压耦合失稳场景与解耦场景,并给出耦合强度的量化评估。

6.2 展望

本文在功角电压失稳检测与耦合失稳机理分析方面取得了一些阶段性成果,但这只是功角、电压稳定性分析领域的冰山一角。作为对本文研究工作的补充或者推广,可以从以下三个方面进行深入研究:

(1) 在失稳检测方面,可以将功角失稳检测方法和电压失稳检测方法相结合,提出一体化的功角电压稳定性评估方法。这可以更准确和快速地预测失稳情况,尤其是在耦合场景下。

(2) 在建模和耦合机理分析方面,下一步考虑变流器设备的外环控制、低压穿越控制对功角稳定性和电压稳定性的影响,例如构网型变流器的电压支撑特性,与同步发电机功角稳定性的相互影响。这些因素在研究中相对较少涉及。

(3) 在耦合失稳场景识别方面,将所提出的量化评估方法应用于在线评估。所提出的方法需要多次计算临界状态的灵敏度,计算效率不高。可以考虑利用深度学习的方法,提高本文所提出的耦合场景的计算效率,拓展应用场景。

(4) 在理论分析的应用方面,将稳定性理论分析应用于控制措施。在耦合失稳情况下,如何优化控制措施是一个具有挑战性的问题,需要综合考虑多种因素。将利用稳定性分析结果来设计控制策略,以提高电力系统的稳定性。

参考文献

- [1] 辛保安, 郭铭群, 王绍武, 等. 适应大规模新能源友好送出的直流输电技术与工程实践[J]. 电力系统自动化, 2021, 45(22): 1-8.
- [2] 谢小荣, 贺静波, 毛航银, 等. “双高”电力系统稳定性的新问题及分类探讨[J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(02): 461-475.
- [3] Hatziaargyriou N., Milanovic J., Rahmann C., et al. Definition and Classification of Power System Stability - Revisited & Extended[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2021, 36(4): 3271-3281.
- [4] 宫泽旭, 艾力西尔·亚尔买买提, 辛焕海, 等. 新能源电力系统并网设备小扰动稳定分析(二): 导出机理与稳定性分类探讨[J]. 中国电机工程学报, 2022, 42(14): 5126-5140.
- [5] GB 38755-2019. 电力系统安全稳定导则[S]. 国家标准化管理委员会, 2019.
- [6] Kundur P.. Power System Stability and Control[M]. New York: McGrawHill, 1994.
- [7] 杨鹏, 刘锋, 姜齐荣, 等. “双高”电力系统大扰动稳定性: 问题、挑战与展望[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2021, 61(05): 403-414.
- [8] 饶宏, 吴为, 周保荣, 等. 云南电网与南网主网交直流系统相互影响及异步联网方案研究[J]. 中国电机工程学报, 2020, 40(11): 3470-3477.
- [9] 屠竞哲, 易俊, 王超, 等. 考虑光伏动态特性的功角电压交互失稳机理分析[J]. 电力系统自动化, 2020, 44(13): 157-165.
- [10] 陈磊, 刘永奇, 戴远航, 等. 电力电子接口新能源并网的暂态电压稳定机理研究[J]. 电力系统保护与控制, 2016, 44(09): 15-21.
- [11] 毛安家, 马静, 蒯圣宇, 等. 高比例新能源替代常规电源后系统暂态稳定与电压稳定的演化机理[J]. 中国电机工程学报, 2020, 40(09): 2745-2756.
- [12] 袁小明, 程时杰, 胡家兵. 电力电子化电力系统多尺度电压功角动态稳定问题[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(19): 5145-5154+5395.
- [13] 黎晓, 刘崇茹, 辛蜀骏, 等. 暂态功角稳定与暂态电压稳定的耦合机理分析与耦合强度评估指标[J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(15): 5091-5107.
- [14] 杨子千, 马锐, 程时杰, 等. 电力电子化电力系统稳定的问题及挑战: 以暂态稳定比较为例[J]. 物理学报, 2020, 69(08): 103-116.
- [15] 张红丽, 刘福锁, 李威, 等. 多种稳定问题矩阵式量化指标及交直流协调控制策略[J]. 电力系统保护与控制, 2017, 45(23): 65-73.

- [16] 方勇杰, 鲍颜红, 徐伟, 等. 电力系统安全稳定预防控制在线计算方法的评述[J]. 电力系统自动化, 2015, 39(11): 199-207.
- [17] Abedini M., Davarpanah M., Sanaye-Pasand M., et al. Generator Out-of-Step Prediction Based on Faster-Than-Real-Time Analysis: Concepts and Applications[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(4): 4563-4573.
- [18] Bhui P., Senroy N.. Real Time Prediction and Control of Transient Stability Using Transient Energy Function[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 32(2): 923-933.
- [19] Yellajosula J. R A K, Wei Y., Grebla M., et al. Online Detection of Power Swing Using Approximate Stability Boundaries[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2020, 35(3): 1220-1229.
- [20] Ma S., Chen C., Liu C., et al. A measurement-simulation hybrid method for transient stability assessment and control based on the deviation energy[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2020, 115: 105422.
- [21] Fang D. Z, Xue Z. Y, Sun W., et al. Transient stability assessment using projection formulations[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2009, 3(6): 596-603.
- [22] Zhao S., Jia H., Fang D., et al. Criterion to evaluate power system online transient stability based on adjoint system energy function[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2015, 9(1): 104-112.
- [23] Gou J., Liu Y., Liu J., et al. Novel pair - wise relative energy function for transient stability analysis and real - time emergency control[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2017, 11(18): 4565-4575.
- [24] Shi Z., Yao W., Zeng L., et al. Convolutional neural network-based power system transient stability assessment and instability mode prediction[J]. Applied Energy, 2020, 263: 114586.
- [25] Liu S., Liu L., Fan Y., et al. An Integrated Scheme for Online Dynamic Security Assessment Based on Partial Mutual Information and Iterated Random Forest[J]. IEEE Transactions on Smart Grid, 2020, 11(4): 3606-3619.
- [26] Rajapakse A. D, Gomez F., Nanayakkara K., et al. Rotor Angle Instability Prediction Using Post-Disturbance Voltage Trajectories[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2010, 25(2): 947-956.
- [27] Gomez F. R, Rajapakse A. D, Annakkage U. D, et al. Support Vector Machine-Based Algorithm for Post-Fault Transient Stability Status Prediction Using

- Synchronized Measurements[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2011, 26(3): 1474-1483.
- [28] Azman S. K, Isbeih Y. J, Moursi M. S E, et al. A Unified Online Deep Learning Prediction Model for Small Signal and Transient Stability[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(6): 4585-4598.
- [29] Yu J. J Q, Hill D. J, Lam A. Y S, et al. Intelligent Time-Adaptive Transient Stability Assessment System[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(1): 1049-1058.
- [30] Jafarzadeh S., Genc V. I. Real-time transient stability prediction of power systems based on the energy of signals obtained from PMUs[J]. Electric Power Systems Research, 2021, 192: 107005.
- [31] Geeganage J., Annakkage U. D, Weekes T., et al. Application of Energy-Based Power System Features for Dynamic Security Assessment[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2015, 30(4): 1957-1965.
- [32] Wang L., Girgis A. A. A new method for power system transient instability detection[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 1997, 12(3): 1082-1089.
- [33] Xie H., Zhang B.-H., Yu G.-L., et al. Power System Transient Stability Detection Based on Characteristic Concave or Convex of Trajectory[C]. Paper abstracts: 2005 IEEE PES Transmission and Distribution Conference & Exposition Asia and Pacific security and sustainable development under deregulation. New York City NY: IEEE, 2005: 1-6.
- [34] Yang S., Hao Z., Zhang B., et al. An Accurate and Fast Start-Up Scheme for Power System Real-Time Emergency Control[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2019, 34(5): 3562-3572.
- [35] 顾卓远, 汤涌, 孙华东, 等. 一种基于转速差 - 功角差变化趋势的暂态功角稳定辨识方法[J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(31): 65-72+8.
- [36] 张保会, 杨松浩, 王怀远, 等. 电力系统暂态稳定性闭环控制(二)——多机电力系统暂态不稳定判别方法[J]. 电力自动化设备, 2014, 34(09): 1-6.
- [37] Dasgupta S., Paramasivam M., Vaidya U., et al. PMU-Based Model-Free Approach for Real-Time Rotor Angle Monitoring[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2015, 30(5): 2818-2819.
- [38] Sobbouhi A. R, Vahedi A.. Online synchronous generator out-of-step prediction by ellipse fitting on acceleration power - Speed deviation curve[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2020, 119: 105965.

- [39] Shamisa A., Majidi B., Patra J. C. Sliding-Window-Based Real-Time Model Order Reduction for Stability Prediction in Smart Grid[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2019, 34(1): 326-337.
- [40] Yang H., Zhang W., Shi F., et al. PMU-based model-free method for transient instability prediction and emergency generator-shedding control[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2019, 105: 381-393.
- [41] Yan J., Liu C.-C., Vaidya U.. PMU-Based Monitoring of Rotor Angle Dynamics[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2011, 26(4): 2125-2133.
- [42] Isbeih Y. J., El Moursi M. S., Xiao W., et al. Generator - based threshold for transient stability assessment[J]. IET Smart Grid, 2019, 2(3): 407-419.
- [43] Chandrashekhar K. S., Hill D. J. Cutset stability criterion for power systems using a structure-preserving model[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 1986, 8(3): 146-157.
- [44] Song Y., Hill D. J., Liu T.. Characterization of Cutsets in Networks With Application to Transient Stability Analysis of Power Systems[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2018, 5(3): 1261-1274.
- [45] Minakawa T., Sato M., Ichikawa Y., et al. A new method for detecting loss of synchronism using power and current measured on a line[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 1999, 14(1): 68-73.
- [46] 吴为, 汤涌, 孙华东, 等. 利用实测响应信息的暂态功角失稳实时判别方法[J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(34): 171-178+26.
- [47] Cai G. W., Chan K. W., Cheng H. Z., et al. Transient Instability Detection Using Line Transient Potential Energy[J]. Electric Power Components and Systems, 2004, 32(6): 627-643.
- [48] Padiyar K. R., Krishna S.. Online Detection of Loss of Synchronism Using Energy Function Criterion[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2006, 21(1): 46-55.
- [49] 周双喜. 电力系统电压稳定性及其控制[M]. 中国电力出版社, 2004.
- [50] 江伟, 王成山, 余贻鑫, 等. 电压稳定裕度对参数灵敏度求解的新方法[J]. 中国电机工程学报, 2006, (02): 13-18.
- [51] 吴政球, 钟浩, 陈辉华. 不需雅可比左特征向量的负荷裕度灵敏度新算法[J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(28): 101-105+16.
- [52] 赵晋泉, 张伯明. 连续潮流及其在电力系统静态稳定分析中的应用[J]. 电力系统自动化, 2005, 29(11): 91-96.
- [53] 熊宁, 程浩忠, 马则良, 等. 基于连续潮流的极限诱导分岔检测方法[J]. 电力

- 系统自动化, 2008, (18): 35-38.
- [54] 董晓明, 梁军, 韩学山, 等. 连续潮流参数选择及步长控制的分析与改进[J]. 电力系统自动化, 2011, 35(13): 49-53+82.
- [55] 阮冲, 刘金婵, 陈宝平, 等. 一种基于自适应步长控制与组合参数化的改进连续潮流计算方法[J]. 电力自动化设备, 2018, 38(10): 184-190.
- [56] 孙华, 胡德文, 李丽, 等. 基于多项式回归分析的连续潮流计算自适应步长控制策略[J]. 电力系统及其自动化学报, 2020, 32(11): 1-6.
- [57] 赵晋泉, 张伯明. 改进连续潮流计算鲁棒性的策略研究[J]. 电力系统自动化, 2005, 25(22): 7-11.
- [58] 彭寒梅, 曹一家, 黄小庆, 等. 无平衡节点孤岛运行微电网的连续潮流计算[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(8): 2057-2067.
- [59] 郭瑞鹏, 韩祯祥. 电压崩溃临界点计算的改进零特征根法[J]. 中国电机工程学报, 2000, (05): 64-67.
- [60] Canizares C. A, Alvarado F. L, DeMarco C. L, et al. Point of collapse methods applied to AC/DC power systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1992, 7(2): 673-683.
- [61] 江伟, 王成山, 余贻鑫, 等. 直接计算静态电压稳定临界点的新方法[J]. 中国电机工程学报, 2006, (10): 1-6.
- [62] 吴浩, 方鸽飞. 电压稳定临界点的实用直接法[J]. 电力系统及其自动化学报, 1999, (Z1): 18-24.
- [63] Moore G. , Spence A. . The Calculation of Turning Points of Nonlinear Equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980, 17(4): 567-576.
- [64] 万凯遥, 姜彤. 增补 P' Q 节点直接计算电压崩溃点的潮流方法[J]. 中国电机工程学报, 2018, 38(12): 3507-3515+10.
- [65] Seydel R. . Numerical computation of branch points in nonlinear equations[J]. Numerische Mathematik, 1979, 33(3): 339-352.
- [66] Jiang T., Wan K., Feng Z.. Boundary-derivative direct method for computing saddle node bifurcation points in voltage stability analysis[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2019, 112: 199-208.
- [67] 姜勇, 周双喜, 朱凌志. 电力系统电压静稳分析中的二阶指标[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2002, (09): 1165-1167+1179.
- [68] 马冠雄, 刘明波, 王奇. 一种识别静态电压稳定分岔点的混合方法[J]. 电力系统自动化, 2006, (24): 17-20+43.
- [69] 杨小煜, 周孝信, 李立新, 等. 潮流方程鞍结分岔点计算的块消去算法[J]. 中

- 国电机工程学报, 2011, 31(07): 83-88.
- [70] 韩文, 韩祯祥. 电压崩溃与功角不稳的关系[J]. 电力系统自动化, 1996, (12): 18-21.
- [71] 彭志炜, 胡国根, 韩祯祥. 电力系统电压稳定与同步稳定分析[J]. 电力系统及其自动化学报, 2000, (01): 1-4+10.
- [72] 康海云. 负荷变动下同步稳定与电压稳定及电压崩溃关系的研究[D]. 广西大学, 2014.
- [73] 顾卓远, 汤涌. 基于响应信息的电压与功角稳定实时紧急控制方案[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(28): 4876-4885.
- [74] 顾卓远, 汤涌, 易俊, 等. 电力系统功角失稳与局部感应电动机失稳相互影响机理分析[J]. 电网技术, 2017, 41(08): 2499-2505.
- [75] Van Cutsem T., Vournas C. D. Voltage stability analysis in transient and mid-term time scales[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1996, 11(1): 146-154.
- [76] 徐泰山, 薛禹胜, 韩祯祥. 暂态电压稳定的模型要求和快速判断[J]. 电力系统自动化, 1995, (12): 11-15.
- [77] 贾宏杰, 余贻鑫, 李鹏, 等. 电力系统混沌现象与不同失稳模式之间的关系[J]. 中国电机工程学报, 2003, (02): 5-8.
- [78] Padiyar K. R., Rao S. S. Dynamic analysis of small signal voltage instability decoupled from angle instability[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 1996, 18(7): 445-452.
- [79] Vournas C. D., Sauer P. W., Pai M. A. Relationships between voltage and angle stability of power systems[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 1996, 18(8): 493-500.
- [80] Schmietendorf K., Peinke J., Friedrich R., et al. Self-organized synchronization and voltage stability in networks of synchronous machines[J]. The European Physical Journal Special Topics, 2014, 223(12): 2577-2592.
- [81] 黎晓, 李剑泽, 苏晨博, 等. 锁相环失步对同步发电机暂态功角稳定性的影响机理分析[J]. 电力系统自动化, 2022, 46(22): 101-110.
- [82] 王清, 薛安成, 郑元杰, 等. 双馈型风电集中接入对暂态功角稳定的影响分析[J]. 电网技术, 2016, 40(3): 875-881.
- [83] 王杨. 大规模直驱风机接入对系统暂态功角稳定性的影响[D]. 昆明理工大学, 2019.
- [84] 喻哲扬, 张君黎, 徐政. 非同步机电源渗透率对同步机之间功角稳定性影响的简化模型分析[J]. 电力自动化设备, 2020, 40(09): 88-97.

-
-
- [85] 熊焱. 非同步机电源对暂态稳定性影响机理分析[D]. 山东大学, 2021.
- [86] 汤蕾, 沈沉, 张雪敏. 大规模风电集中接入对电力系统暂态功角稳定性的影响 (一):理论基础[J]. 中国电机工程学报, 2015, 35(15): 3832-3842.
- [87] 汤蕾, 沈沉, 张雪敏. 大规模风电集中接入对电力系统暂态功角稳定性的影响 (二):影响因素分析[J]. 中国电机工程学报, 2015, 35(16): 4043-4051.
- [88] Vittal E., O'Malley M., Keane A.. Rotor Angle Stability With High Penetrations of Wind Generation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(1): 353-362.
- [89] 姜惠兰, 吴玉璋, 周照清, 等. 含双馈风力发电场的多机系统暂态功角稳定性分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2018, 38(04): 999-1005+1276.
- [90] 唐王倩云, 周保荣, 胡家兵, 等. 锁相同步型风机 - 同步机互联电力系统转子转速尺度暂态同步稳定性分析[J]. 中国电机工程学报, 2021: 1-17.
- [91] He X., Geng H.. Transient Stability of Power Systems Integrated With Inverter-Based Generation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2021, 36(1): 553-556.
- [92] YUSHUANG LIU, MENG HUANG, XIAOMING ZHA, et al. Stability analysis of PLL influenced by control loop in grid-connected converters under fault disturbance[J]. CSEE Journal of Power and Energy Systems, 2020, 6(2): 239-248.
- [93] He X., Geng H., Ma S.. Transient Stability Analysis of Grid-Tied Converters Considering PLL's Nonlinearity[J]. CPSS Transactions on Power Electronics and Applications, 2019, 4(1): 40-49.
- [94] Ma S., Geng H., Liu L., et al. Grid-Synchronization Stability Improvement of Large Scale Wind Farm During Severe Grid Fault[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(1): 216-226.
- [95] Zhao J., Huang M., Yan H., et al. Nonlinear and Transient Stability Analysis of Phase-Locked Loops in Grid-Connected Converters[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2021, 36(1): 1018-1029.
- [96] Hu Q., Fu L., Ma F., et al. Large Signal Synchronizing Instability of PLL-Based VSC Connected to Weak AC Grid[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2019, 34(4): 3220-3229.
- [97] Yang Z., Ma R., Cheng S., et al. Nonlinear Modeling and Analysis of Grid-Connected Voltage-Source Converters Under Voltage Dips[J]. IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics, 2020, 8(4): 3281-3292.
- [98] 韩文, 韩祯祥. 一种判别电力系统电压稳定和功角稳定的新方法[J]. 中国电机工程学报, 1997, 17(06): 8-9+17.
- [99] Srivastava S. C. Singularity of reduced Jacobian matrices for identifying voltage and

- angle instability[C]. 1997 Fourth International Conference on Advances in Power System Control, Operation and Management, APSCOM-97. (Conf. Publ. No. 450), 1997: 493-498.
- [100]高卓伟, 李国庆. 电力系统失稳模式判别的新方法[J]. 华北电力技术, 2004, (08): 6-9.
- [101]Sanchez-Gasca J. J., Vittal V., Gibbard M. J., et al. Inclusion of Higher Order Terms for Small-Signal (Modal) Analysis: Committee Report—Task Force on Assessing the Need to Include Higher Order Terms for Small-Signal (Modal) Analysis[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2005, 20(4): 1886-1904.
- [102]Pariz N., Shanechi H. M., Vaahedi E.. Explaining and validating stressed power systems behavior using modal series[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2003, 18(2): 778-785.
- [103]张靖, 文劲宇, 程时杰. 基于向量场正规形方法的功角和电压稳定特征分析[J]. 电力系统自动化, 2006, 30(12): 12-16.
- [104]范强, 陈园园. 电力系统电压稳定与功角稳定的关联性研究[J]. 贵州电力技术, 2015, 18(12): 63-66.
- [105]刘光晔, 杨以涵. 电力系统电压稳定与功角稳定的统一分析原理[J]. 中国电机工程学报, 2013, 33(13): 135-149.
- [106]负志皓, 孙毓婕, 丰颖, 等. 大电网静态稳定主导模式在线判别方法研究[J]. 电网技术, 2018, 42(01): 276-284.
- [107]C. Q. LIU. A discussion of the WSCC 2 July 1996 outages[J]. IEEE Power Engineering Review, 1998, 18(10): 60-61.
- [108]侯俊贤, 韩民晓, 董毅峰, 等. 基于振荡中心和电压形态的暂态功角失稳和电压失稳判断方法[J]. 电网技术, 2016, 40(05): 1509-1515.
- [109]汤涌, 林伟芳, 孙华东, 等. 基于戴维南等值跟踪的电压失稳和功角失稳的判别方法[J]. 中国电机工程学报, 2009, 29(25): 1-6.
- [110]吴为, 汤涌, 孙华东, 等. 电力系统暂态功角失稳与暂态电压失稳的主导性识别[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(31): 5610-5617.
- [111]王少博, 张文朝, 党杰, 等. 暂态功角失稳和电压失稳的模糊综合评判方法[J]. 电网与清洁能源, 2017, 33(03): 77-83.
- [112]郑超, 孙华东, 张爱军, 等. 基于广域支路响应的功角与电压主导稳定模式判别及紧急控制[J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(18): 6148-6160.
- [113]李宗翰, 孙华东, 郑超, 等. 基于广域支路响应无功分布特征的主导失稳形态判 别 [J/OL]. (2022-08-17). [2023-04-

- 05]. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2107.TM.20220816.1558.003.html>.
- [114]Overbye T. J, Pai M. A, Sauer P. W. A composite framework for synchronous and voltage stability in power systems[C]. 1992 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1992: 2541-2544.
- [115]HSIAO-DONG CHIANG, JIANZHONG TONG, K. N. MIU. Predicting unstable modes in power systems: theory and computations[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1993, 8(4): 1429-1437.
- [116]吴浩, 韩祯祥. 电压稳定和功角稳定关系的平衡点分析[J]. 电力系统自动化, 2003, (12): 28-31.
- [117]Wang Y., Sun Y., Mei S.. A method of distinguishing short-term voltage stability from rotor angle stability and its application[C]. IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies, 2012: 1-5.
- [118]Praprost K. L, Loparo K. A. An energy function method for determining voltage collapse during a power system transient[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 1994, 41(10): 635-651.
- [119]V. VENKATASUBRAMANIAN, H. SCHATTLER, J. ZABORSZKY. Local bifurcations and feasibility regions in differential-algebraic systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(12): 1992-2013.
- [120]YULIN ZHAO, WEI ZHANG, RUIYE LIU. A direct method to determine the stability of power systems during transients[C]. 2016 IEEE PES Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference (APPEEC), 2016: 2255-2259.
- [121]仲悟之. 受端系统暂态电压稳定机理研究[D]. 中国电力科学研究院, 2010.
- [122]石重托, 姚伟, 黄彦浩, 等. 基于 SE-CNN 和仿真数据的电力系统主导失稳模式智能识别[J]. 中国电机工程学报, 2022, 42(21): 7719-7731.
- [123]张润丰, 姚伟, 石重托, 等. 融合虚拟对抗训练和均值教师模型的主导失稳模式识别半监督学习框架[J]. 中国电机工程学报, 2022, 42(20): 7497-7509.
- [124]Bergen A. R, Hill D. J. A Structure Preserving Model for Power System Stability Analysis[J]. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1981, PAS-100(1): 25-35.
- [125]Van der Schaft A., Jeltsema D.. Port-Hamiltonian Systems Theory: An Introductory Overview[J]. Foundations and Trends® in Systems and Control, 2014, 1(2): 173-378.
- [126]Fouad A., Stanton S.. Transient Stability of a Multi-Machine Power System. Part II: Critical Transient Energy[J]. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems,

- 1981, PAS-100(7): 3417-3424.
- [127]倪敬敏, 沈沉, 陈乾. 基于慢同调的自适应主动解列控制(一):理论基础探究[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(25): 4374-4384.
- [128]Medvedev G. S, Mizuhara M. S. Stability of Clusters in the Second-Order Kuramoto Model on Random Graphs[J]. Journal of Statistical Physics, 2021, 182(2).
- [129]蔡国伟, 穆钢, K W Chan, 等. 基于网络信息的暂态稳定性定量分析——支路势能法[J]. 中国电机工程学报, 2004, (05): 5-10.
- [130]Padiyar K. R, Uma Rao K.. Discrete control of series compensation for stability improvement in power systems[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 1997, 19(5): 311-319.
- [131]Wang K.. Power System Critical Cutset Identification based on Rolling Double Level Hierarchical Clustering[J]. Energy Procedia, 2019, 159: 148-153.
- [132]Raj A., Soman S. A. A graph theoretic approach to accelerate natural cutset prediction during an out-of-step condition[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2020, 123: 106278.
- [133]Liu Z., Ding J., Li L.. A Method of Identifying Power System Oscillation and Tracking Oscillation Center Based on Wide Area Measurement System[C]. IEEE International Conference on Energy Internet: ICEI 2019 : proceedings : Nanjing, China , 27-31 May 2019. Los Alamitos, California: IEEE Computer Society, Conference Publishing Services, 2019: 7-12.
- [134]Zhang Y., Zhang S., Meng G.. A new wide area information based power system out-of-step oscillation detecting and oscillation center tracking scheme[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2017, 93: 228-237.
- [135]Standard load models for power flow and dynamic performance simulation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1995, 10(3): 1302-1313.
- [136]Dong F. , Kostyniak T. , Lam B. . Dealing with power flow solution difficulties[J]. 2012, [2022-08-28].
- [137]Sobbouhi A. R, Vahedi A.. Transient stability prediction of power system; a review on methods, classification and considerations[J]. Electric Power Systems Research, 2021, 190: 106853.
- [138]Paudyal S., Ramakrishna G., Sachdev M. S. Application of Equal Area Criterion Conditions in the Time Domain for Out-of-Step Protection[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2010, 25(2): 600-609.

-
- [139]S. SHUKLA, L. MILI. Hierarchical Decentralized Control for Enhanced Rotor Angle and Voltage Stability of Large-Scale Power Systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(6): 4783-4793.
- [140]Lesieutre B. C, Roy S., Donde V., et al. Power System Extreme Event Screening using Graph Partitioning[C]. Power Symposium, 2006. NAPS 2006. 38th North AmericanIEEE / Institute of Electrical and Electronics Engineers Incorporated, 2006: 503-510.
- [141]Manik D., Timme M., Withaut D.. Cycle flows and multistability in oscillatory networks[J]. Chaos (Woodbury, N.Y.), 2017, 27(8): 83123.
- [142]刘福锁, 方勇杰, 吴雪莲, 等. 失步振荡下瞬时频率特性及振荡中心定位方法[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(04): 986-992.
- [143]郑超, 陈云辉, 吕思卓, 等. 振荡中心 $\cos \phi$ 定位校正及广域失步解列控制[J]. 电网技术, 2021, 45(04): 1518-1526.
- [144]杨越. 用于解列控制决策的机组同调分群与振荡中心定位方法研究[D]. 华北电力大学, 2018.
- [145]李宗翰, 孙华东, 徐式蕴, 等. 基于电压相量轨迹的失步振荡中心特性解析及解列断面预判[J]. 电网技术, 2023, 47(03): 1098-1106.
- [146]吴浩, 郭瑞鹏, 韩祯祥. 电力系统微分代数模型的奇异性和暂态电压稳定[J]. 电力系统自动化, 2006, 30(13): 16-21.
- [147]仲悟之, 汤涌. 电力系统微分代数方程模型的暂态电压稳定性分析[J]. 中国电机工程学报, 2010, 30(25): 10-16.
- [148]张元鹏, 周双喜, 王利锋, 等. 静态电压稳定性分析模型的理论基础[J]. 中国电机工程学报, 1999, (10): 56-59+64.
- [149]Cañizares C. . Conditions for saddle-node bifurcations in AC/DC power systems[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 1995, 17(1): 61-68.
- [150]Yasir K. H, Liao H., Tang Y.. Identification of impasse points via extended system reduction with application to power systems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2001, 47(6): 4129-4138.
- [151]Abbott J. P. Numerical continuation methods for nonlinear equations and bifurcation problems[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1977, 17(2): 307-308.
- [152]Seydel R.. On a class of bifurcation test functions[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 1997, 8(6): 851-855.

- [153]Hussein A., Chen K. E., Wan H.. ON ADAPTING TEST FUNCTION METHODS FOR FAST DETECTION OF FOLD BIFURCATIONS IN POWER SYSTEMS[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(01): 179-185.
- [154]Griewank A., Reddien G. W. Characterization and Computation of Generalized Turning Points[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1984, 21(1): 176-185.
- [155]Chiang H.-D., Wang C.-S., Flueck A. J. Look-ahead voltage and load margin contingency selection functions for large-scale power systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1997, 12(1): 173-180.
- [156]Ejebe G. C., Irisarri G. D., Mokhtari S., et al. Methods for contingency screening and ranking for voltage stability analysis of power systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1996, 11(1): 350-356.
- [157]Jia Z. , Jeyasurya B. . Contingency ranking for on-line voltage stability assessment[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2000, 15(3): 1093-1097.
- [158]Chiang H.-D., Jean-Jumeau R.. Toward a practical performance index for predicting voltage collapse in electric power systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1995, 10(2): 584-592.
- [159]Chen K., Hussein A., Bradley M. E., et al. A performance-index guided continuation method for fast computation of saddle-node bifurcation in power systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2003, 18(2): 753-760.
- [160]Berizzi A., Finazzi P., Dosi D., et al. First and second order methods for voltage collapse assessment and security enhancement[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1998, 13(2): 543-551.
- [161]Hiskens I. A , Chakrabarti B. B . Direct calculation of reactive power limit points[J]. Fuel and Energy Abstracts, 1996, 37(3): 192.
- [162]陈昌, 姜彤, 万凯遥, 等. 直接计算静态电压稳定裕度的改进崩溃点法[J]. 电力自动化设备, 2020, 40(11): 150-156.
- [163]万凯遥, 姜彤, 冯卓诚, 等. 静态电压稳定分岔点的直接识别算法[J]. 中国电机工程学报, 2020, 40(20): 6548-6557.
- [164]Seydel R.. ON DETECTING STATIONARY BIFURCATIONS[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1991, 01(02): 335-337.
- [165]覃智君, 侯云鹤, 吴复立. 大规模交直流系统潮流计算的实用化模型[J]. 中国电机工程学报, 2011, 31(10): 95-101.
- [166]Josz C., Fliscounakis S., Maeght J., et al. AC Power Flow Data in MATPOWER

- and QCQP Format: iTesla, RTE Snapshots, and PEGASE[R] , 2016. <https://arxiv.org/pdf/1603.01533>.
- [167]Fliscounakis S., Panciatici P., Capitanescu F., et al. Contingency Ranking With Respect to Overloads in Very Large Power Systems Taking Into Account Uncertainty, Preventive, and Corrective Actions[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(4): 4909-4917.
- [168]杨柳. 基于二阶非均匀 Kuramoto 模型的电力系统暂态稳定分析[D]. 哈尔滨工业大学, 2014.
- [169]梁涛, 周宁, 卢天琪, 等. 感应电动机负荷暂态模型的参数填补方法及典型参数分析[J]. 电力系统自动化, 2020, 44(01): 74-82.
- [170]王青子, 袁小明. 异步电动机幅相运动方程模型及动态过程机理分析[J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(01): 363-373+425.
- [171]王玓. 基于幅相运动方程的异步电动机机电时间尺度建模及其对电力系统机电动态影响研究[D]. 华中科技大学, 2018.
- [172]阮佳阳, 鲁宗相, 乔颖, 等. 并网型双馈异步发电机奇异诱导分岔型电压崩溃机理[J]. 中国电机工程学报, 2014, 34(31): 5467-5476.
- [173]Oluic M., Berggren B., Echavarren F. M., et al. On the Nature of Voltage Impasse Regions in Power System Dynamics Studies[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2018, 33(3): 2660-2670.
- [174]吴浩, 郭瑞鹏, 韩祯祥. 电力系统微分代数模型的奇异性和多能量函数面[J]. 电力系统自动化, 2006, 30(11): 28-34+85.
- [175]薛禹胜. 运动稳定性量化理论:非自治非线性多刚体系统的稳定性分析[M]. 运动稳定性量化理论:非自治非线性多刚体系统的稳定性分析, 1999.
- [176]Wang X., Taul M. G, Wu H., et al. Grid-Synchronization Stability of Converter-Based Resources—An Overview[J]. IEEE Open Journal of Industry Applications, 2020, 1: 115-134.
- [177]Hu Q., Fu L., Ma F., et al. Analogized Synchronous-Generator Model of PLL-Based VSC and Transient Synchronizing Stability of Converter Dominated Power System[J]. IEEE Transactions on Sustainable Energy, 2021, 12(2): 1174-1185.
- [178]He X., Geng H., Li R., et al. Transient Stability Analysis and Enhancement of Renewable Energy Conversion System During LVRT[J]. IEEE Transactions on Sustainable Energy, 2020, 11(3): 1612-1623.
- [179]张宇, 蔡旭, 张琛, 等. 并网变换器的暂态同步稳定性研究综述[J]. 中国电机工程学报, 2021, 41(05): 1687-1702.

- [180]Taul M. G, Wang X., Davari P., et al. An Overview of Assessment Methods for Synchronization Stability of Grid-Connected Converters Under Severe Symmetrical Grid Faults[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2019, 34(10): 9655-9670.
- [181]徐政. 电力系统广义同步稳定性的物理机理与研究途径[J]. 电力自动化设备, 2020, 40(09): 3-9.
- [182]Brochu J., Larose C., Gagnon R.. Validation of Single- and Multiple-Machine Equivalents for Modeling Wind Power Plants[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2011, 26(2): 532-541.
- [183]周明儒, 林武忠, 倪明康, 等. 奇异摄动导论[M]. 科学出版社, 2014.
- [184]王洁聪. 含 MMC 的交直流系统建模与稳定性分析[D]. 华北电力大学(北京), 2021.
- [185]Krupa M., Szmolyan P.. Geometric Analysis of the Singularly Perturbed Planar Fold[A]. Jones C. KRT, Khibnik AI. Multiple-time-scale dynamical systems[C]. New York: Springer, 2001: 89-116.
- [186]Krupa M., Szmolyan P.. Extending Geometric Singular Perturbation Theory to Nonhyperbolic Points---Fold and Canard Points in Two Dimensions[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2001, 33(2): 286-314.
- [187]Chung S.-K. . A phase tracking system for three phase utility interface inverters[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2000, 15(3): 431-438.
- [188]吴浩, 郭瑞鹏, 韩祯祥. 电力系统微分代数模型的奇异性和多能量函数面(续完)[J]. 电力系统自动化, 2006, 30(12): 38-41+74.
- [189]Xue Y., van Cutsem T., Ribbens-Pavella M.. A simple direct method for fast transient stability assessment of large power systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1988, 3(2): 400-412.
- [190]Meegahapola L., Littler T.. Characterisation of large disturbance rotor angle and voltage stability in interconnected power networks with distributed wind generation[J]. IET Renewable Power Generation, 2015, 9(3): 272-283.
- [191]Mochamad R. F, Preece R. . Assessing the Impact of VSC-HVDC on the Interdependence of Power System Dynamic Performance in Uncertain Mixed AC/DC Systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 35(1): 63-74.
- [192]Qi B., Hasan K. N, Milanovic J. V. Identification of Critical Parameters Affecting Voltage and Angular Stability Considering Load-Renewable Generation Correlations[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2019, 34(4): 2859-2869.
- [193]Papadopoulos P. N, Milanovic J. V. Probabilistic Framework for Transient Stability

- Assessment of Power Systems With High Penetration of Renewable Generation[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(4): 3078-3088.
- [194]徐泰山, 薛禹胜, 韩祯祥. 感应电动机暂态电压失稳的定量分析[J]. 电力系统自动化, 1996, (06): 12-15.
- [195]井艳清, 李兴源, 郭晓鸣, 等. 考虑感应电动机负荷模型的暂态电压稳定快速判据[J]. 电力系统自动化, 2011, 35(05): 10-14.
- [196]Huadong S., Xiaoxin Z.. A Quick Criterion on Judging Short-Term Large-Disturbance Voltage Stability Considering Dynamic Characteristic of Induction Motor Loads[C]. 2006 International Conference on Power System Technology, 2006: 1-6.
- [197]GB/T 40581-2021. 电力系统安全稳定计算规范[S]. 国家标准化管理委员会, 2021.
- [198]GB/T 40615-2021. 电力系统电压稳定评价导则[S]. 国家标准化管理委员会, 2021.
- [199]薛禹胜, 徐泰山, 刘兵, 等. 暂态电压稳定性及电压跌落可接受性[J]. 电力系统自动化, 1999, (14): 4-8.
- [200]杨堤, 程浩忠, 马则良, 等. 考虑静态和暂态电压稳定的交直流混联系统综合无功规划方法研究[J]. 中国电机工程学报, 2017, 37(11): 3078-3086+3363.
- [201]Zhang Y., Xu Y., Dong Z. Y., et al. A Hierarchical Self-Adaptive Data-Analytics Method for Real-Time Power System Short-Term Voltage Stability Assessment[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(1): 74-84.
- [202]薛安成, 周健, 刘瑞煌, 等. 采用多二元表判据的实用暂态电压稳定裕度指标研究[J]. 中国电机工程学报, 2018, 38(14): 4117-4125+4317.
- [203]侯建兰, 刘育权, 谢小荣, 等. 一种量化评估暂态电压稳定性的指标与方法[J]. 电力自动化设备, 2015, 35(10): 151-156.
- [204]Lammert G., Premm D., Ospina L. D P., et al. Control of Photovoltaic Systems for Enhanced Short-Term Voltage Stability and Recovery[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2019, 34(1): 243-254.
- [205]周仕豪, 唐飞, 刘涤尘, 等. 考虑降低暂态电压失稳风险的动态无功优化配置方法[J]. 电力系统保护与控制, 2018, 46(07): 68-75.
- [206]Dong Y., Xie X., Zhou B., et al. An Integrated High Side Var-Voltage Control Strategy to Improve Short-Term Voltage Stability of Receiving-End Power Systems[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2016, 31(3): 2105-2115.
- [207]Begovic M. M, Phadke A. G. Control of voltage stability using sensitivity

-
- analysis[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1992, 7(1): 114-123.
- [208]M. A. Pai. Energy Function Analysis for Power System Stability[M]. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [209]Long W.-G., Li Y.-T., Liu S.-Y., et al. Real Solutions of the First Painlevé Equation with Large Initial Data[J]. Studies in Applied Mathematics, 2017, 139(4): 505-532.
- [210]Olver F. W J. NIST handbook of mathematical functions[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [211]Joshi N., Kitaev A. V. On Boutroux's Triconfluent Solutions of the First Painlevé Equation[J]. Studies in Applied Mathematics, 2001, 107(3): 253-291.
- [212]Gils S., Krupa M., Szmolyan P. Asymptotic expansions using blow-up[J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2005, 56(3): 369-397.
- [213]廖世俊. 超越摄动: 同伦分析方法导论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

附录

附录 A：能量关系和功率表达式

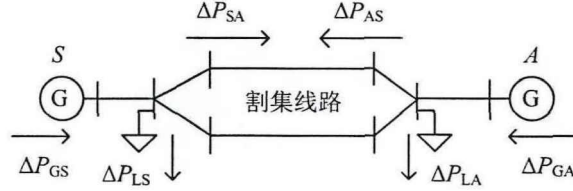


图 A-1 双机系统模型

Fig.A-1 Two-machine system model

如图 A-1 所示。由于网络 A 和 S 中的系统功率平衡得到式(A-1)、(A-2)。式(A-1)和(A-2)也具有基尔霍夫电流定律的形式。在图 A-1 的双机系统模型中，网络被简化为两个节点，仅包含割集支路，所以发电机的转子转速也具有基尔霍夫电压定律的形式。因此，该等值电力网络也具有 Dirac 结构特征。等式(A-1)、(A-2)两边同时乘上发电机转速差 ω_2 并积分即可得到发电机动能与支路势能的关系。

$$\Delta P_{GS} + \Delta P_{LS} + \Delta P_{lossS} + \Delta P_{SA} = 0 \quad (A-1)$$

$$\text{其中, } \Delta P_{GS} = \sum_{i=1, i \in S}^m P_{mi} - P_{ei}, \quad \Delta P_{LS} = \sum_{i=m+ns+1, i \in S}^{m+ns+nl} P_{L,i} - P_{L,i}^s,$$

$$\Delta P_{lossS} = \sum_{\substack{k,l=m+1 \\ k,l \in S}}^{m+ns} (P_{k,l} + P_{l,k}) - (P_{k,l}^s + P_{l,k}^s), \quad \Delta P_{SA} = \sum_{k \in S} \sum_{l \in A} P_{k,l} - P_{k,l}^s.$$

同样地,

$$\Delta P_{GA} + \Delta P_{LA} + \Delta P_{lossA} + \Delta P_{AS} = 0 \quad (A-2)$$

$$\text{其中, } \Delta P_{GA} = \sum_{i=1, i \in A}^m P_{mi} - P_{ei}, \quad \Delta P_{LA} = \sum_{i=m+ns+1, i \in A}^{m+ns+nl} P_{L,i} - P_{L,i}^s,$$

$$\Delta P_{lossA} = \sum_{\substack{k,l=m+1 \\ k,l \in A}}^{m+ns} (P_{k,l} + P_{l,k}) - (P_{k,l}^s + P_{l,k}^s), \quad \Delta P_{AS} = \sum_{k \in A} \sum_{l \in S} P_{k,l} - P_{k,l}^s.$$

根据式(2-2)。得到式(A-3)和式(A-4)。

$$M_A M_S \frac{d\omega_S}{dt} = M_A (\Delta P_{GS} - \frac{M_S}{M_T} P_{Col}) \quad (A-3)$$

$$M_S M_A \frac{d\omega_A}{dt} = M_S (\Delta P_{GA} - \frac{M_A}{M_T} P_{Col}) \quad (A-4)$$

从式(A-3)中减去式(A-4), 在等式两侧乘以 ω_2 , 并积分得等式(2-6)中的 V_{KE2} :

$$V_{KE2} = \int \frac{M_A \Delta P_{GS} - M_S \Delta P_{GA}}{M_A + M_S} \omega_2 dt \quad (A-5)$$

通过式(A-2)、(A-1)消去式(A-5)中的 ΔP_{GA} 和 ΔP_{GS} , 得到两个机群之间的相对势能 V_{PE2} , 使得 $V_{KE2} + V_{PE2}$ 为常数。 V_{PE2} 的表达式为:

$$V_{PE2} = \int (\Delta P_{L2} + \Delta P_{loss2} + \Delta P_C + \Delta P_{Closs}) \omega_2 dt \quad (A-6)$$

其中, $\Delta P_{L2} = (M_A \Delta P_{LS} - M_S \Delta P_{LA}) / (M_A + M_S)$,

$$\Delta P_{loss2} = (M_A \Delta P_{lossS} - M_S \Delta P_{lossA}) / (M_A + M_S),$$

$$\Delta P_C = \Delta P_{SA},$$

$$\Delta P_{Closs} = - \sum_{k \in S} \sum_{l \in A} \frac{M_S}{M_A + M_S} (P_{k,l} + P_{l,k} - P_{k,l}^s - P_{l,k}^s).$$

因此,

$$V_{KE2} + V_{PE2} = 0.$$

由于式(A-7), 式(A-1)中的 ΔP_{LS} 可改写为式(A-8)。

$$\sum_{i=m+ns+1, i \in S}^{m+ns+nl} P_{L,i} = V_{LS}^T [G_{LS}] V_{LS}^*, \quad (A-7)$$

其中右上角(*)表示对复数求共轭。

$$\begin{aligned} \Delta P_{LS} &= \sum_{i=m+ns+1, i \in S}^{m+ns+nl} P_{L,i} - P_{L,i}^s, \\ &= C_{stS} + \text{real}(E_{GS}^T Y_{S,SA} E_{GA}^*) - \sum_{i \in S} P_{L,i}^s, \end{aligned} \quad (A-8)$$

其中, $[G_{LS}]$ 表示由网络 S 的负荷电导组成的对角矩阵, $\text{real}(\cdot)$ 表示复数的实数部分,

$$C_{stS} = E_{GS}^T Y_{S,SS} E_{GS}^* + E_{GA}^T Y_{S,AA} E_{GA}^*, \quad Y_{S,SS} = Y_{LGS}^T Z_{SS}^T [G_{LS}] Z_{SS}^* Y_{LGS}^*,$$

$$Y_{S,AA} = Y_{LGA}^T Z_{SA}^T [G_{LS}] Z_{SA}^* Y_{LGA}^*, \quad Y_{S,SA} = 2 Y_{LGS}^T Z_{SS}^T [G_{LS}] Z_{SA}^* Y_{LGA}^*.$$

同样地, 式(A-2)中的 ΔP_{LA} 可以改写为:

$$\begin{aligned} \Delta P_{LA} &= \sum_{i=m+ns+1, i \in A}^{m+ns+nl} P_{L,i} - P_{L,i}^s, \\ &= C_{stA} + \text{real}(E_{GS}^T Y_{A,SA} E_{GA}^*) - \sum_{i \in A} P_{L,i}^s, \end{aligned} \quad (A-9)$$

其中, $[G_{LA}]$ 表示由网络 A 的负荷电导组成的对角矩阵,

$$C_{stA} = E_{GS}^T Y_{A,SS} E_{GS}^* + E_{GA}^T Y_{A,AA} E_{GA}^*, \quad Y_{A,SS} = Y_{LGS}^T Z_{AS}^T [G_{LA}] Z_{AS}^* Y_{LGS}^*,$$

$$Y_{A,AA} = Y_{LGA}^T Z_{AA}^T [G_{LA}] Z_{AA}^* Y_{LGA}^*, \quad Y_{A,SA} = 2 Y_{LGS}^T Z_{AS}^T [G_{LA}] Z_{AA}^* Y_{LGA}^*.$$

为了便于描述, 以与 Z_{LL} 相同的方式将导纳矩阵 Y_{LL} 分为以下形式。

$$Y_{LL} = \begin{pmatrix} Y_{SS} & Y_{SA} \\ Y_{AS} & Y_{AA} \end{pmatrix}$$

根据形成导纳矩阵的元素的不同线路，导纳矩阵 Y_{LL} 被拆分为两部分： $Y_{2,LL}$ 和 $Y_{1,LL}$ 。 $Y_{2,LL}$ 部分是由割集组成的导纳矩阵元素，其余部分表示为 $Y_{1,LL}$ 。 $G_{1,S}$ 、 $G_{1,A}$ 、 $G_{2,SS}$ 、 $G_{2,AA}$ 、 G_{SA} 和 G_{AS} 分别表示矩阵 $Y_{1,S}$ 、 $Y_{1,A}$ 、 $Y_{2,SS}$ 、 $Y_{2,AA}$ 、 Y_{SA} 和 Y_{AS} 的实部。

$$Y_{LL} = Y_{1,LL} + Y_{2,LL} \quad (A-10)$$

$$\text{其中, } Y_{1,LL} = \begin{pmatrix} Y_{1,S} & 0 \\ 0 & Y_{1,A} \end{pmatrix}, Y_{2,LL} = \begin{pmatrix} Y_{2,SS} & Y_{SA} \\ Y_{AS} & Y_{2,AA} \end{pmatrix}.$$

对于连接机群 S 中的节点 k_i 和机群 A 中的节点 l_i 的第 i 条割集支路，其线路功率表示为 P_{k_i, l_i} ：

$$P_{k_i, l_i} = V_{k_i}^T [G_{k_i, l_i}] V_{l_i}^* - \text{real}(V_{k_i}^T [Y_{k_i, l_i}^*] V_{l_i}^*) \quad (A-11)$$

因此，式(A-6)中 ΔP_C 可以改写为：

$$\begin{aligned} \Delta P_C &= \sum_{i \in C} P_i - P_i^s \\ &= C_{stC} + \text{real}(E_{GS}^T Y_{C,SA} E_{GA}^*) - \sum_{i \in C} P_i^s \end{aligned} \quad (A-12)$$

其中，

$$\begin{aligned} C_{stC} &= E_{GS}^T Y_{C1,SS} E_{GS}^* + E_{GA}^T Y_{C1,AA} E_{GA}^* + \text{real}(E_{GS}^T Y_{C2,SS} E_{GS}^* + E_{GA}^T Y_{C2,AA} E_{GA}^*), \\ Y_{C1,SS} &= Y_{LGS}^T Z_{SS}^T G_{2,SS} Z_{SS}^* Y_{LGS}^*, Y_{C1,AA} = Y_{LGA}^T Z_{SA}^T G_{2,SS} Z_{SA}^* Y_{LGA}^*, \\ Y_{C2,SS} &= Y_{LGS}^T Z_{SS}^T Y_{SA}^* Z_{AS}^* Y_{LGS}^*, Y_{C2,AA} = Y_{LGA}^T Z_{SA}^T Y_{SA}^* Z_{AA}^* Y_{LGA}^*, \\ Y_{C,SA} &= 2Y_{LGS}^T Z_{SS}^T G_{2,SS} Z_{SA}^* Y_{LGA}^* + Y_{LGS}^T Z_{SS}^T Y_{SA}^* Z_{AA}^* Y_{LGA}^* + \\ &\quad Y_{LGS}^T Z_{AS}^T Y_{AS} Z_{SA}^* Y_{LGA}^* \end{aligned}$$

作为近似分析，假设群集中的发电机满足以下条件，则机群内发电机之间的动力学可以忽略：

$$\delta_i - \delta_i^s = \delta_S - \delta_S^s, (\forall i \in S).$$

然后得到(A-13)和(A-14)。

$$E_{GSi} = |E_{GSi}| \angle (\delta_i^s + \delta_i - \delta_i^s) = E_{GSi}^s \exp(j(\delta_S - \delta_S^s)), \quad (A-13)$$

$$E_{GS} = E_{GS}^s \exp(j(\delta_S - \delta_S^s)) \quad (A-14)$$

相似地，

$$E_{GA} = E_{GA}^s \exp(j(\delta_A - \delta_A^s)), \quad (A-15)$$

因此，根据式 (A-8) , (A-14) 和(A-15)， ΔP_{LS} 表达式可以被简化为：

$$\Delta P_{LS} = P_{LSc} + P_{LSmax} \cos(\delta + \gamma_{LS}) \quad (A-16)$$

其中， $\delta = (\delta_S - \delta_S^s) - (\delta_A - \delta_A^s)$ ， $P_{LSc} = -\text{real}((E_{GS}^s)^T Y_{S,SA} (E_{GA}^s)^*)$ ，

$$P_{LS\max} = |(E_{GS}^s)^T Y_{S,SA} (E_{GA}^s)^*|, \quad P_{LS\max} = |(E_{GS}^s)^T Y_{S,SA} (E_{GA}^s)^*|,$$

$$\gamma_{LS} = \text{angle}((E_{GS}^s)^T Y_{S,SA} (E_{GA}^s)^*), \quad \text{angle}(\cdot) \text{ 表示复数的角度。}$$

同样地, ΔP_{LA} 的表达式可以简化为:

$$\Delta P_{LA} = P_{LAc} + P_{LA\max} \cos(\delta + \gamma_{LA}), \quad (\text{A-17})$$

$$\text{其中, } P_{LAc} = -\text{real}((E_{GS}^s)^T Y_{A,SA} (E_{GA}^s)^*), \quad P_{LA\max} = |(E_{GS}^s)^T Y_{A,SA} (E_{GA}^s)^*|,$$

$$\gamma_{LA} = \text{angle}((E_{GS}^s)^T Y_{A,SA} (E_{GA}^s)^*).$$

同样地, ΔP_C 的表达式也可以简化为:

$$\Delta P_C = P_{Cc} + P_{C\max} \cos(\delta + \gamma_C), \quad (\text{A-18})$$

$$\text{其中, } P_{Cc} = -\text{real}((E_{GS}^s)^T Y_{C,SA} (E_{GA}^s)^*), \quad P_{C\max} = |(E_{GS}^s)^T Y_{C,SA} (E_{GA}^s)^*|,$$

$$\gamma_C = \text{angle}((E_{GS}^s)^T Y_{C,SA} (E_{GA}^s)^*).$$

根据式(A-16)和(A-17), γ_S 和 γ_A 分别由 $Y_{S,SA}$ 和 $Y_{A,SA}$ 确定。矩阵 Z_{LL} (由 Z_{SS} , Z_{SA} , Z_{AS} 和 Z_{AA} 组成) 和 Y_{LG} (由 Y_{LGS} 和 Y_{LGA} 组成) 中元素的虚部的绝对值远大于实部, γ_S 和 γ_A 约为 0。根据式(A-18), γ_C 由(A-12)中的 $Y_{C,SA}$ 确定。由于网络阻抗分量的对角优势, Z_{SS} 和 Z_{AA} 中元件的绝对值明显大于 Z_{SA} 和 Z_{AS} 中元件的绝对值, 所以, γ_C 更容易受 $Y_{LGS}^T Z_{SS}^T Y_{SA}^* Z_{AA}^* Y_{LGA}^*$ 的影响。由于该项的相角接近于 $-\pi/2$, γ_C 约为 $-\pi/2$ 。因此, $\gamma_{L2} - \gamma_C \approx \frac{\pi}{2}$ 。

附录 B：IEEE39 和 IEEE118 系统算例信息

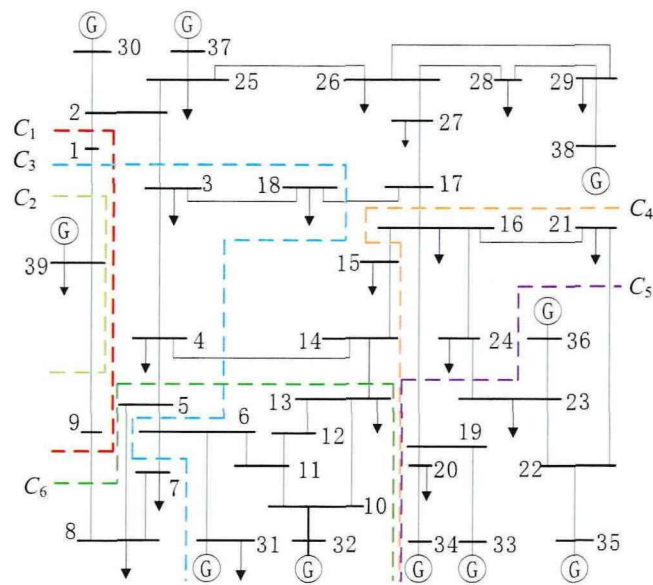


图 B-1 10 机 30 节点系统的单线图

Fig.B-1 Single-line diagram of the 39 node system with 10 generators

第 2 章中 39 节点系统算例的仿真信息补充如表 B-1 和表 B-2 所示。故障信息补充如表 B-3 和表 B-4 所示。

表 B-1 失稳模式 1 情况下发电机的初始输出功率

Table B-1 Table The initial output power of generators in cases with instability mode 1					
发电机 编号	初始有功功率 (MW)	初始无功功率 (MVar)	发电机 编号	初始有功功率 (MW)	初始无功功率 (MVar)
30	336.93	158.26	35	699.11	233.61
31	539.42	207.68	36	582.64	114.77
32	687.57	212.07	37	612.79	26.74
33	666.03	119.43	38	610.88	-4.94
34	543.94	175.48	39	1107.80	80.89

表 B-2 失稳模式 2 情况下发电机的初始输出功率

Table B-2 Table The initial output power of generators in cases with instability mode 2					
发电机 编号	初始有功功率 (MW)	初始无功功率 (MVar)	发电机 编号	初始有功功率 (MW)	初始无功功率 (MVar)
30	176.84	119.25	35	659.03	212.77
31	232.71	115.71	36	590.11	108.62
32	274.62	117.26	37	374.20	37.59
33	649.26	112.92	38	401.82	-13.44
34	620.55	179.03	39	1823.85	37.74

表 B-3 不稳定模式 1 中的故障编号

Table B-3 The fault number in cases with instability mode 1

故障编 号	故障母 线	故障持续时 间(s)	故障编 号	故障母 线	故障持续时 间(s)	故障编 号	故障母 线	故障持续时 间(s)
1	2	0.139	11	18	0.129	21	14	0.14
2	3	0.126	12	21	0.131	22	15	0.14
3	4	0.126	13	24	0.117	23	16	0.12
4	6	0.126	14	27	0.159	24	17	0.12
5	8	0.148	15	2	0.15	25	18	0.14
6	9	0.301	16	3	0.14	26	21	0.15
7	14	0.126	17	4	0.14	27	24	0.13
8	15	0.122	18	6	0.14	28	27	0.17
9	16	0.098	19	8	0.16			
10	17	0.109	20	9	0.32			

表 B-4 不稳定模式 2 中的故障编号

Table B-4 The fault number in cases with instability mode 2

故障编 号	故障母 线	故障持续时 间(s)	故障编 号	故障母 线	故障持续时 间(s)	故障编 号	故障母 线	故障持续时 间(s)
1	3	0.290	8	21	0.182	15	16	0.15
2	4	0.356	9	24	0.173	16	17	0.2
3	14	0.326	10	27	0.367	17	18	0.26
4	15	0.210	11	3	0.3	18	21	0.2
5	16	0.140	12	4	0.37	19	24	0.2
6	17	0.187	13	14	0.35	20	27	0.38
7	18	0.248	14	15	0.22			

第 3 章和第 5 章中，IEEE39 系统参数按照文献[208]设置。因为原参数表现为功角失稳，对其运行方式进行了调整，增加了负荷功率(修改的负荷参数见表 B-5，电动机模型的参数见表 5-2)，调整了 34 号发电机参数： $X_d=0.25\text{p.u.}$ ， $X_q=0.22\text{p.u.}$ ， $X'_d=0.062\text{p.u.}$ 。1s 时刻在 27 号母线上发生三相短路故障，短路电阻 0.01Ω 。

表 B-5 负荷节点参数

Table B-5 The parameters of load node

负荷节点	有功功率 (MW)	无功功率 (MW)	电动机占比
8	308	154	100%
15	712.5	356.25	43.26%
18	682	341	0%

第 3 章、第 4 章和第 5 章中，含变流器接入的 IEEE39 系统如图 B-2 所示。

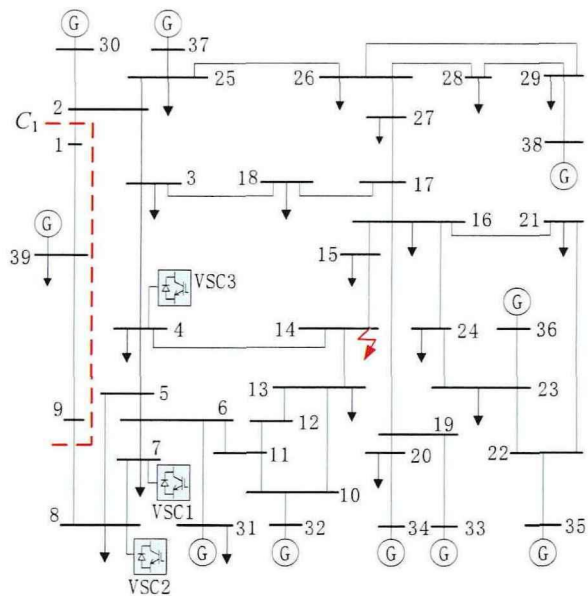


图 B-2 含变流器的 39 节点系统单线图

Fig.B-2 Single line diagram of 39 node system with converter

118 节点系统的拓扑连接图如图 B-3 所示，本文第 2 章中的故障信息如表 B-6 所示。

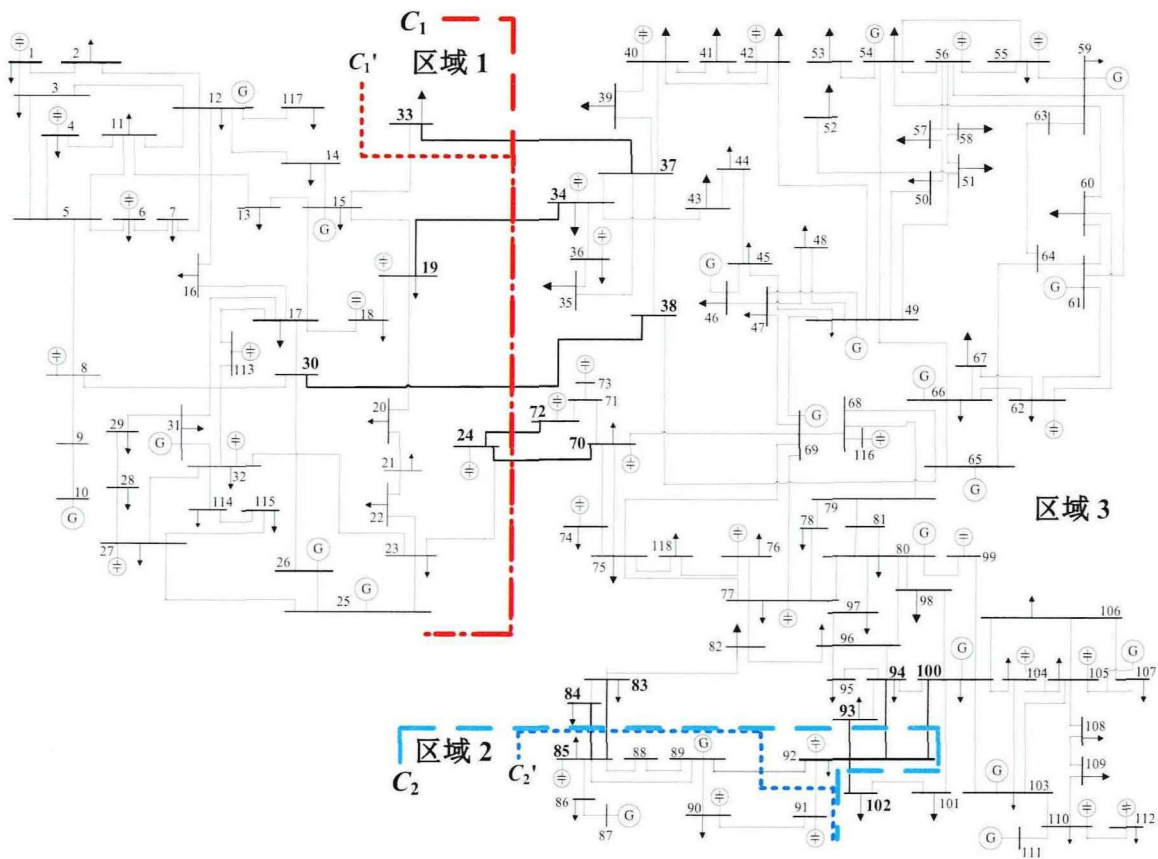


图 B-3 118 母线测试系统单线图

Fig.B-3 Single-line diagram of the 118-bus test system

表 B-6 故障编号列表
Table B-6 The list of the fault number

故障编 号	故障母 线	故障持续时 间(s)	故障编 号	故障母 线	故障持续时 间(s)	故障编 号	故障母 线	故障持续时 间(s)
1	4	0.32	7	17	0.31	13	91	0.44
2	5	0.27	8	38	0.41	14	92	0.18
3	6	0.49	9	113	0.46	15	93	0.41
4	7	0.48	10	85	0.31	16	94	0.29
5	11	0.36	11	88	0.30	17	96	0.37
6	15	0.40	12	90	0.31	18	102	0.38

附录 C：海森矩阵显式计算量的估计方法

根据文献[64,66]中的计算方法，将式(3-39)中的矩阵雅克比矩阵 F_y 写成分块矩阵，如式(C-1)所示：

$$F_y = \begin{pmatrix} H & N \\ M & L \end{pmatrix} \quad (C-1)$$

其中， $H = \partial P / \partial \theta^T$ ， $N = (\partial P / \partial V^T)[V]$ ， $M = \partial Q / \partial \theta^T$ ， $L = (\partial Q / \partial V^T)[V]$ 。 $[V]$ 表示以节点电压幅值为对角线的对角矩阵， H ， N ， M ， L 分别表示有功方程、无功方程对节点电压相角、电压幅值的偏导数形成的矩阵。

海森矩阵 F_{yy} 中的非零元素都会与向量 W 进行一次乘法运算，因此在估计计算量时只关心 F_{yy} 中非零元素的个数。雅克比矩阵中非零元素的位置及数量几乎由导纳矩阵决定，因此将文献[64]中的元素表达简化为导纳矩阵的元素。例如，

$$\partial H_{m,m} / \partial \theta_m = -(G_{i,i} - P_i / V_i^2) \quad (C-2)$$

有功功率的注入 P_i 不等于 0 时，式(C-2)通常等于非零数；当 $P_i=0$ 时， $G_{i,i}$ 决定了式(C-2)是否等于 0，因此在表 C-1 中简单记为 $G_{i,i}$ ，以方便估计 F_{yy} 中非零元素的下限。非对角位置的 $\partial H_{m,j} / \partial \theta_m$ ($m \neq j$) 表达式如下，由于其是否为 0 元素可以由 $B_{m,j}$ 是否等于 0 决定，所以在表 C-1 中记为 $B_{m,j}$ 。

$$\partial H_{m,j} / \partial \theta_m = (G_{m,j} \cos \theta_{m,j} + B_{m,j} \sin \theta_{m,j}) V_m \quad (C-3)$$

表 C-1 海森矩阵中部分元素与导纳矩阵的对应关系

Table C-1 Correspondence between some elements of Hessian matrix and admittance matrix

条件	$\partial H_{i,j} / \partial \theta_m$	$\partial N_{i,j} / \partial \theta_m$	$\partial M_{i,j} / \partial \theta_m$	$\partial L_{i,j} / \partial \theta_m$
$i=j=m$	$G_{i,i}$	$B_{i,i}$	$B_{i,i}$	$G_{i,i}$
$i=j \neq m$	$B_{i,m}$	$B_{i,m}$	$B_{i,m}$	$B_{i,m}$
$i \neq j, i=m$	$B_{m,j}$	$B_{m,j}$	$B_{m,j}$	$B_{m,j}$
$i \neq j, j=m$	$B_{i,m}$	$B_{i,m}$	$B_{i,m}$	$B_{i,m}$
其他	0	0	0	0

对于三维矩阵 $\partial H_{i,j} / \partial \theta_m$ ，其中 i, j, m 的取值范围都是所有 PQ 节点和 PV 节点，记为从 1 到 n_{tot} 。因此，根据表 C-1 中的第二行，第二列， G 矩阵的每个对角线元素在 $\partial H_{i,j} / \partial \theta_m$ 矩阵的计算中出现 1 次，根据第三行第二列到第五行第二列， B 矩阵的每个非对角线元素出现 3 次。

$$\begin{aligned} n_{\text{nz}}(\partial H_{i,j} / \partial \theta_m) &\approx n_{\text{nz}}(\{G_{i,i} | i = 1, \dots, n_{\text{tot}}\}) \\ &+ n_{\text{nz}}(\{B_{i,m} | i, m = 1, \dots, n_{\text{tot}}; i \neq m\}) \times 2 \\ &+ n_{\text{nz}}(\{B_{m,j} | m, j = 1, \dots, n_{\text{tot}}; m \neq j\}) \end{aligned} \quad (C-4)$$

式中 $n_{\text{nz}}()$ ——矩阵或者集合中非零元素的个数。

同理，三维矩阵 $\partial N_{i,j} / \partial \theta_m$ 的非零元素估计如式(C-5)所示，其中 i, m 的取值从 1

到 n_{tot} , j 的取值从 1 到 $n_{\text{tot}} - r_{\text{pv}}$ (包含所有 PQ 节点), r_{pv} 表示 PV 节点 (给定注入有功功率与电压幅值的节点) 的数量。

$$\begin{aligned} n_{\text{nz}}(\partial N_{i,j}/\partial \theta_m) \approx & n_{\text{nz}}(\{B_{j,j}|j=1,\dots,n_{\text{tot}}-r_{\text{pv}}\}) \\ & + n_{\text{nz}}(\{B_{i,m}|i,m=1,\dots,n_{\text{tot}};i\neq m\}) \times 2 \\ & + n_{\text{nz}}(\{B_{m,j}|m=1,\dots,n_{\text{tot}};j=1,\dots,n_{\text{tot}}-r_{\text{pv}};m\neq j\}) \end{aligned} \quad (\text{C-5})$$

同理, 对于矩阵 $\partial M_{i,j}/\partial \theta_m$, $\partial L_{i,j}/\partial \theta_m$ 也采取同样的估计方式, 只是需要注意下标 i 和 j 的取值范围不同。

以及对于表格中没有列写的 $(\partial H_{i,j}/\partial V_m)V_m$, $(\partial N_{i,j}/\partial V_m)V_m$, $(\partial M_{i,j}/\partial V_m)V_m$, $(\partial L_{i,j}/\partial V_m)V_m$ 也采取相同的方式估计非零元素的个数, 只需要将 m 的取值范围修改为从 1 到 $n_{\text{tot}} - r_{\text{pv}}$, 最终求和得到矩阵 F_{yy} 的所有非零元素的个数。

附录 D：发电机势能关于负荷电导的灵敏度分析

负荷电导 $Y_L = G_L + jB_L$ ，忽略线路电导和电动机定子侧电导， $G_1=0$ ， $G_2=0$ ， $G_3=0$ ，分析 G_L 变化对功角子系统稳定区域的影响。

$$\frac{d(V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda})}{d(-B_{23L})} = \frac{2G_L(B_{23L}^2 + G_L^2)(\cos\delta_0 - \cos\delta_{\max})}{E_g\alpha_B(B_{23L}^2 - G_L^2)^2(\delta_{\max} - \delta_0)} > 0 \quad (D-1)$$

$$\frac{d(V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda})}{d(G_L)} = \frac{2B_{23L}(B_{23L}^2 + G_L^2)(\cos\delta_0 - \cos\delta_{\max})}{E_2\alpha_B(B_{23L}^2 - G_L^2)^2(\delta_{\max} - \delta_0)} < 0 \quad (D-2)$$

假设 $\delta_{\max} > \delta_0 \geq 0$ ， $V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda}$ 对于参数 $-B_{23L}/G_L$ 在其区间 $-B_{23L}/(G_L) \in [0, 1)$ 和 $-B_{23L}/G_L \in (1, \infty)$ 内单调递增。

函数 $k_G^+(a, b)$ 与函数 $k_G^-(a, b)$ 有以下性质：(i) 当 $a < 0$ 且 $b < 0$ 时，函数 $-1 < k_G^+(a, b) < 0$ ， $k_G^-(a, b) > 1$ ；(ii) 当 $a < 0$ 且 $b > 0$ 时，函数 $0 < k_G^+(a, b) < 1$ ， $k_G^-(a, b) < -1$ 。

由于 $\delta_{\max} > \delta_0 \geq 0$ ，所以 $\cos\delta_0 - \cos\delta_{\max} > 0$ 。根据性质(i)可以得到当 $\delta_a^{(1)} < 0$ 时， $k_\lambda^{(1)} < 0$ 和 $k_\lambda^{(2)} > 1$ 。根据性质(ii)可以得到当 $\delta_a^{(2)} > 0$ 时， $0 < k_\lambda^{(1)} < 1$ 和 $k_\lambda^{(2)} < -1$ 。 $k_\lambda^{(1)}$ 、 $k_\lambda^{(2)}$ 的表达式见正文中式(4-17)、式(4-18)。

(a) $\delta_a^{(1)} < 0$

注意到以下三个特殊关系：(i) 当 $-B_{23L}/G_L = k_\lambda^{(2)}$ 时， $V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda} = -1$ ， $V_{p1\lambda} > 0$ 。(ii) 当 $-B_{23L}/G_L = 1$ 时， $V_{p1\lambda} = 0 > V_{p2\lambda}$ 且 $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda} < 0$ 。(iii) 当 $-B_{23L}/G_L = 0$ 时， $V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda} = -1 - \delta_a^{(1)}/(E_2\alpha_B(\delta_{\max} - \delta_0)) > -1$ ， $V_{p1\lambda} < 0$ 。

又因为 $V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda}$ 的单调性质，我们通过 $k_\lambda^{(2)}$ 和 1 将 $-B_{23L}/G_L$ 的取值范围划分为三个区域，如图 D-1 所示，每个区域内 $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda}$ 的符号不变。但是在 $-B_{23L}/G_L = 1$ 处有一个极点，区域 2 和区域 3 之间 $V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda}$ 不是连续的。因此区域 3 中 $V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda}$ 的大小通过 $V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda}$ 的单调性以及 $-B_{23L}/G_L = 0$ 处的性质得到。

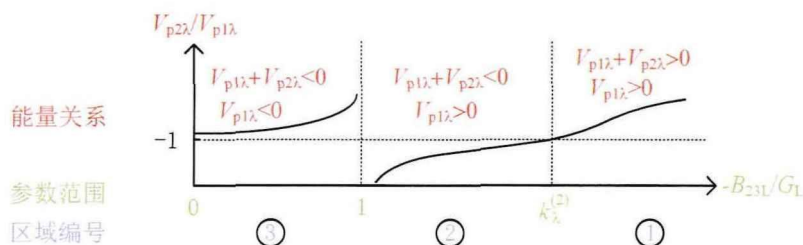


图 D-1 不同 $-B_{23L}/(G_L)$ 范围里负荷有功变化对暂态势能的灵敏度 ($\delta_a^{(1)} < 0$)

Fig.D-1 Sensitivity of load active power change to transient energy in different $-B_{23L}/G_L$ ranges

在这三个区域里每个区域的性质如下：

(i) 区域 1：($-B_{23L}/G_L > k_\lambda^{(2)}$)

$V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda} > -1$, $V_{p1\lambda} > 0$ 。因此 $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda} > 0$ 。

(iii) 区域 2: ($1 < -B_{23L}/G_L < k_{\lambda}^{(2)}$)

$V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda} < -1$, $V_{p1\lambda} > 0$ 。因此 $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda} < 0$ 。

(iv) 区域 3: ($0 < -B_{23L}/G_L < 1$)

$V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda} > -1$, $V_{p1\lambda} < 0$ 。因此 $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda} < 0$ 。

(b) $\delta_{\alpha}^{(1)} > 0$

注意到以下三个特殊关系: (i) 当 $-B_{23L}/G_L = k_{\lambda}^{(1)}$ 时, $V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda} = -1$, $V_{p1\lambda} < 0$ 。(ii) 当 $-B_{23L}/G_L = 1$ 时, $V_{p1\lambda} = 0 > V_{p2\lambda}$ 且 $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda} < 0$ 。(iii) 当 $-B_{23L}/G_L \rightarrow +\infty$ 时, $V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda} = -\delta_{\alpha}^{(2)}/(E_2 \alpha_B (\delta_{\max} - \delta_0)) - 1 < -1$, $V_{p1\lambda} > 0$ 。

以上三个特殊值将 $-B_{23L}/(G_L + \lambda)$ 的范围划分为三个区域, 如图 D-2 所示。

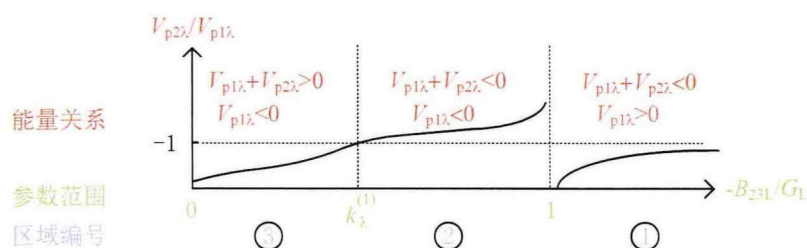


图 D-2 不同 $-B_{23L}/G_L$ 范围里负荷有功变化对暂态势能的灵敏度 ($\delta_{\alpha}^{(1)} > 0$)

Fig.D-2 Sensitivity of load active power change to transient energy in different $-B_{23L}/G_L$ ranges

(i) 区域 1: ($-B_{23L}/G_L > 1$)

$V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda} < -1$ 且 $V_{p1\lambda} > 0$ 。因此 $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda} < 0$ 。

(ii) 区域 2: ($k_{\lambda}^{(1)} < -B_{23L}/G_L < 1$)

$V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda} > -1$ 且 $V_{p1\lambda} < 0$ 。因此 $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda} < 0$ 。

(iv) 区域 3: ($0 < -B_{23L}/G_L < k_{\lambda}^{(1)}$)

$V_{p2\lambda}/V_{p1\lambda} < -1$ 且 $V_{p1\lambda} < 0$ 。因此 $V_{p1\lambda} + V_{p2\lambda} > 0$ 。

综上两种情况, 得到了文中的结论。

当 $\delta_{\max} < \delta_0 \leq 0$, $\cos \delta_0 > \cos \delta_{\max}$ 时, 式(D-1)和(D-2)的符号分别为小于 0 和大于 0。

当 $\delta_{\max} < \delta_0 \leq 0$, $\cos \delta_0 < \cos \delta_{\max}$ 时, 式(D-1)和(D-2)的符号不变。函数 $k_G^+(a, b)$ 与函数 $k_G^-(a, b)$ 也有以下性质: (i) 当 $a < 0$ 时函数 $k_G^+(a, b)$ 对于变量 b 单调递增, 函数 $k_G^-(a, b)$ 对于变量 b 也单调递增; (ii) 当 $a < 0$ 且 $b > 0$ 时, 函数 $0 < k_G^+(a, b) < 1$, $k_G^-(a, b) < -1$; (iii) 当 $a < 0$ 且 $b < 0$ 时, 函数 $-1 < k_G^+(a, b) < 0$, $k_G^-(a, b) > 1$ 。然后基于相似的方法, 也能得到结论。但在本文中未讨论这两种情况。

附录 E：奇异点附近的动力学分析

本附录基于几何奇异摄动理论和“吹胀技巧”对奇异点附近进行动力学分析。

奇异点附近的轨迹示意图如图 E-1 a) 所示。图中红色点 F 表示奇异点。 $\Sigma^{\text{in}} = \{(\theta_p, y_p, \delta_g, \omega_g), \theta_p \in J, y_p \in R, \delta_g = \theta_p^F - \rho^4, \omega_g > 1\}$, J 表示 θ_p^F 附近一个小的区间, ρ 表示一个小的正数。 $\Sigma^{\text{out}} = \{(\theta_p, y_p, \delta_g, \omega_g), \theta_p = \theta_p^F + \rho^2, \delta_g, y_p, \omega_g \in R\}$ 。文中的定理 4.1 如下。

定理 4.1: 基于方程(4-29)在奇异点附近建立从 Σ^{in} 到 Σ^{out} 的映射, 存在 ε_0 , 当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ 时, 经过 Σ^{in} 的轨迹 $S_{a,\varepsilon}$ 将从坐标 $(\theta_p^F + \rho^2, y_p, h(\varepsilon), \omega_g)$ 处穿过 Σ^{out} , 其中 $h(\varepsilon) = O(\varepsilon^{4/5})$ 。

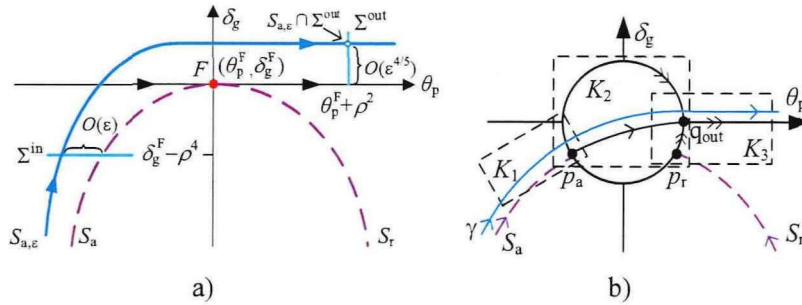


图 E-1 a) 奇异点附近轨迹的在 θ_p - δ_g 平面上的投影, b) 奇异点“吹胀”后的示意图

Fig.E-1 a) Projection of trajectory near Singular point on θ_p - δ_g plane, b) Schematic diagram after "inflation" of Singular point;

定理 4.1 描述了图 E-1 a) 中蓝色实线所表示的轨迹 $S_{a,\varepsilon}$ 越过奇异点时从慢动态到快动态过渡的过程, 并说明该过程是方程(4-29)的性质, 具有一般性。文献[185,186] 中在平面二维系统中证明了一个类似的定理, 由于本文的方程(4-29)是一个四维系统, 在结论和推导过程上存在部分差异。本文与文献[186]中推导的差异主要体现在“吹胀”的坐标变换与坐标卡 K_2 中动态方程的分析。本附录接下来推导定理 4.1 成立的理由。

(1) “吹胀”的坐标变换

通过时间尺度变换 $\tau = \lambda/\varepsilon$, 式(4-29)转化为以下形式。

$$\begin{cases} d\delta_g/d\tau = \varepsilon\omega_0(\omega_g - 1)T_1 \\ d\omega_g/d\tau = \varepsilon(P_m - P_g(\theta_p, \delta_g)) - \varepsilon D_g(\omega_g - 1) \\ d\theta_p/d\tau = V_q(\theta_p, \delta_g) + y_p k_i/k_p^2 \\ dy_p/d\tau = V_q(\theta_p, \delta_g) \\ d\varepsilon/d\tau = 0 \end{cases} \quad (\text{E-1})$$

这种形式的好处是能够将奇异点看作平衡点, 使用一种“吹胀”的技巧来分析奇异点附近的轨迹特征, 降低直接分析的难度。尽管如此, 这个分析过程也是非常复杂的。由于奇异点 F 是(E-1)的一个平衡点, 在该点对 $P_g(\delta_g, \theta_p)$ 和 $V_q(\delta_g, \theta_p)$ 进行泰勒展开得到:

$$P_g(\theta_p, \delta_g) \approx P_{g0} + M_{11}\tilde{\theta}_p + M_{12}\tilde{\delta}_g + M_{13}\tilde{\theta}_p^2/2 + M_{14}\tilde{\delta}_g^2/2 + M_{15}\tilde{\theta}_p\tilde{\delta}_g \quad (E-2)$$

$$V_q(\theta_p, \delta_g) \approx V_q(\theta_p^F, \delta_g^F) + M_{21}\tilde{\theta}_p + M_{22}\tilde{\delta}_g + M_{23}\tilde{\theta}_p^2/2 + M_{24}\tilde{\delta}_g^2/2 + M_{25}\tilde{\theta}_p\tilde{\delta}_g \quad (E-3)$$

式中: $\tilde{\theta}_p = \theta_p - \theta_p^F$, $\tilde{\delta}_g = \delta_g - \delta_g^F$, $P_{g0} = P_g(\theta_p^F, \delta_g^F)$, $M_{11} = \frac{\partial P_g}{\partial \theta_p} \big|_{(\theta_p^F, \delta_g^F)}$,

$$M_{12} = \frac{\partial P_g}{\partial \delta_g} \big|_{(\theta_p^F, \delta_g^F)}, M_{13} = \frac{\partial^2 P_g}{\partial \theta_p^2} \big|_{(\theta_p^F, \delta_g^F)}, M_{14} = \frac{\partial^2 P_g}{\partial \delta_g^2} \big|_{(\theta_p^F, \delta_g^F)}, M_{15} = \frac{\partial^2 P_g}{\partial \delta_g \partial \theta_p} \big|_{(\theta_p^F, \delta_g^F)},$$

$$M_{21} = \frac{\partial V_q}{\partial \theta_p} \big|_{(\theta_p^F, \delta_g^F)}, M_{22} = \frac{\partial V_q}{\partial \delta_g} \big|_{(\theta_p^F, \delta_g^F)}, M_{23} = \frac{\partial^2 V_q}{\partial \theta_p^2} \big|_{(\theta_p^F, \delta_g^F)}, M_{24} = \frac{\partial^2 V_q}{\partial \delta_g^2} \big|_{(\theta_p^F, \delta_g^F)},$$

$$M_{25} = \frac{\partial^2 V_q}{\partial \delta_g \partial \theta_p} \big|_{(\theta_p^F, \delta_g^F)}. \text{在奇异点处 } M_{21}=0, M_{23}>0.$$

将式(E-2)和(E-3)代入式(E-1),并将坐标轴进行平移得到式(E-4)。坐标平移关系为: $\theta_p = \theta_p^F + \tilde{\theta}_p$, $\delta_g = \delta_g^F + \tilde{\delta}_g$, $\omega_g = \omega_g^F + \tilde{\omega}_g$, $\omega_g^F > 1$ 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{\theta}_p}{d\tau} = \frac{k_i}{k_p^2} y_p + M_{22}\tilde{\delta}_g + \frac{1}{2} M_{23} \cdot \tilde{\theta}_p^2 + \frac{1}{2} M_{24} \cdot \tilde{\delta}_g^2 + M_{25}\tilde{\delta}_g\tilde{\theta}_p \\ \frac{dy_p}{d\tau} = M_{22}\tilde{\delta}_g + \frac{1}{2} M_{23}\tilde{\theta}_p^2 + \frac{1}{2} M_{24}\tilde{\delta}_g^2 + M_{25}\tilde{\delta}_g\tilde{\theta}_p \\ \frac{d\tilde{\delta}_g}{d\tau} = \varepsilon T_J \omega_0 (\tilde{\omega}_g + \omega_g^F) \\ \frac{d\tilde{\omega}_g}{d\tau} = \varepsilon (-P_{g0} + P_m - D_g(\tilde{\omega}_g + \omega_g^F) - \\ \quad M_{11}\tilde{\theta}_p - M_{12}\tilde{\delta}_g - \frac{1}{2} M_{13}\tilde{\theta}_p^2 - \frac{1}{2} M_{14}\tilde{\delta}_g^2 - M_{15}\tilde{\theta}_p\tilde{\delta}_g) \\ \frac{d\varepsilon}{d\tau} = 0 \end{array} \right. \quad (E-4)$$

奇异点 $F(\theta_p^F, \delta_g^F)$ 在式(E-4)中对应于点 $(\tilde{\theta}_p, y_p, \tilde{\delta}_g, \tilde{\omega}_g, \varepsilon) = (0, 0, 0, 0, 0)$, 该点的特征值中有 3 个 0 特征值, 简单的平衡点线性化方式难以分析。“吹胀技巧”结合几何奇异摄动理论的方法通过坐标变换, 将该高阶奇点转化为多个奇点, 在多个坐标卡中进行分析, 然后再将分析结果“拼接”起来, 最终得到奇异点附近的轨迹特征。

针对系统(E-4)采用以下坐标变换:

$$\tilde{\theta}_p = r_i^2 x_i, \quad y_p = r_i^3 u_i, \quad \tilde{\delta}_g = r_i^4 y_i, \quad \tilde{\omega}_g = r_i^4 z_i, \quad \varepsilon = r_i^5 \varepsilon_i.$$

式中: i 表示坐标卡的编号, $i=1,2,3$, $r_i>0$ 。

分别令 $y_1=-1$, $\varepsilon_2=1$, 和 $x_3=1$ 得到三个坐标卡 K_1 , K_2 , K_3 的坐标变换公式, 分别为式(E-5)、(E-6)和(E-7)。

$$\tilde{\theta}_p = r_1^2 x_1, \quad y_p = r_1^3 u_1, \quad \tilde{\delta}_g = -r_1^4, \quad \tilde{\omega}_g = r_1^4 z_1, \quad \varepsilon = r_1^5 \varepsilon_1 \quad (\text{E-5})$$

$$\tilde{\theta}_p = r_2^2 x_2, \quad y_p = r_2^3 u_2, \quad \tilde{\delta}_g = r_2^4 y_2, \quad \tilde{\omega}_g = r_2^4 z_2, \quad \varepsilon = r_2^5 \quad (\text{E-6})$$

$$\tilde{\theta}_p = r_3^2, \quad y_p = r_3^3 u_3, \quad \tilde{\delta}_g = r_3^4 y_3, \quad \tilde{\omega}_g = r_3^4 z_3, \quad \varepsilon = r_3^5 \varepsilon_3 \quad (\text{E-7})$$

式中：坐标轴 $(x_1, u_1, r_1, z_1, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}^5$, $(x_2, u_2, y_2, z_2, r_2) \in \mathbb{R}^5$, $(r_3, u_3, y_3, z_3, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}^5$ 。以上变换将式(E-4)中的原点“吹胀”成了坐标卡 $K_i(i=1,2,3)$ 中 $r_i=0(i=1,2,3)$ 的空间。

坐标卡 $K_i(i=1,2,3)$ 分析的轨迹区域如图 E-1(b)所示，其中黑色圆圈表示奇异点被吹胀成一个高维球面， γ 表示轨迹 $S_{a,\varepsilon}$ 在三个坐标卡中的映射，在三个坐标卡中分别记为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 。 K_1 坐标卡主要描述轨迹经过奇异点前的慢动态， K_3 坐标卡描述轨迹经过奇异点后的快动态， K_2 坐标卡体现快动态和慢动态的“连接”过程。由于 K_1 坐标卡和 K_3 坐标卡中的证明方法与文献[186]中相似，因此，本文着重说明 K_2 坐标卡中的分析，以及它如何与 K_1 坐标卡和 K_3 坐标卡“连接”。本文对 K_1 和 K_2 坐标卡中的分析主要介绍相关结论，不做详细推导。

(2) 三个坐标卡之间的联系与坐标变换

轨迹 γ_1 从 Σ_1^{in} 处进入，从 Σ_1^{out} 处离开坐标卡 K_1 ， Σ_1^{in} 对应于定理 4.1 中的 Σ^{in} 。轨迹 γ_2 从 Σ_2^{in} 处进入，从 Σ_2^{out} 处离开坐标卡 K_2 。轨迹 γ_3 从 Σ_3^{in} 处进入，从 Σ_3^{out} 处离开坐标卡 K_3 。 Σ_3^{out} 对应于定理 4.1 中的 Σ^{out} 。 Σ_i^{in} 和 Σ_i^{out} ($i=1,2,3$)的集合表示如下：

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{\text{in}} &= \{(x_1, u_1, r_1, z_1, \varepsilon_1) \in D_1 | r_1 = \rho\}, \quad \Sigma_1^{\text{out}} = \{(x_1, u_1, r_1, z_1, \varepsilon_1) \in D_1 | \varepsilon_1 = \sigma\}, \\ \Sigma_2^{\text{in}} &= \{(x_2, u_2, y_2, z_2, r_2) | y_2 = \sigma^{-4/5}\}, \quad \Sigma_2^{\text{out}} = \{(x_2, u_2, y_2, z_2, r_2) | x_2 = \sigma^{-2/5}\}, \\ \Sigma_3^{\text{in}} &= \{(r_3, u_3, y_3, z_3, \varepsilon_3) | r_3 \in [0, \rho], u_3, y_3, z_3 \in R, \varepsilon_3 = \sigma\}, \\ \Sigma_3^{\text{out}} &= \{(r_3, u_3, y_3, z_3, \varepsilon_3) | r_3 \in \rho, u_3, y_3, z_3 \in R, \varepsilon_3 = [0, \sigma]\}, \end{aligned}$$

式中： $D_1 = \{(x_1, u_1, r_1, z_1, \varepsilon_1) | x_1, u_1, z_1 \in R, 0 \leq r_1 \leq \rho, 0 \leq \varepsilon_1 \leq \sigma\}$ ， σ 是较小的正数。

在坐标卡的重叠区域，坐标卡 $K_i(i=1,2,3)$ 之间的坐标变换公式可以由式(E-5)、(E-6)和(E-7)得到。 κ_{12} 表示从坐标卡 K_1 到 K_2 的变换，如式(E-8)所示。

$$x_2 = x_1 / \varepsilon_1^{2/5}, u_2 = u_1 / \varepsilon_1^{3/5}, y_2 = -1 / \varepsilon_1^{4/5}, z_2 = z_1 / \varepsilon_1^{4/5}, r_2 = r_1 \varepsilon_1^{1/5} \quad (\text{E-8})$$

$\kappa_{21} = \kappa_{12}^{-1}$ 表示从坐标卡 K_2 到 K_1 的变换。当 $y_2 < 0$ 时， κ_{21} 如式(E-9)所示。

$$x_1 = x_2 / \sqrt{-y_2}, u_1 = u_2 / (-y_2)^{3/4}, r_1 = r_2 (-y_2)^{1/4}, z_1 = -z_2 / y_2, \varepsilon_1 = 1 / (-y_2)^{5/4} \quad (\text{E-9})$$

κ_{23} 表示从坐标卡 K_2 到 K_3 的变换，当 $x_2 > 0$ 时， κ_{23} 如式(E-10)所示。

$$r_3 = r_2 \sqrt{x_2}, u_3 = u_2 / x_2^{3/2}, y_3 = y_2 / x_2^2, z_3 = z_2 / x_2^2, \varepsilon_3 = 1 / x_2^{5/2} \quad (\text{E-10})$$

基于坐标变换式(E-8)， Σ_1^{out} 对应于 Σ_2^{in} 。基于坐标变换式(E-10)， Σ_2^{out} 对应于 Σ_3^{in} 。三个坐标卡通过以上坐标变换刚好“连接”起来。定理 4.1 中从 Σ^{in} 到 Σ^{out} 的映射可以拆分为从 Σ_1^{in} 到 Σ_1^{out} 的映射，然后从 Σ_2^{in} 到 Σ_2^{out} 的映射，最后从 Σ_3^{in} 到 Σ_3^{out} 的

映射。因此，只需要定性描述三个坐标卡中的轨迹，然后通过坐标变换将其连接起来，即可证明定理 4.1。

(3) 在坐标卡 K_2 中的动态

将坐标变换(E-6)代入式(E-4)，假设 $r_2=0$ ，得到以下方程：

$$\begin{cases} x_2' = (k_i/k_p^2)u_2 \\ u_2' = M_{23}x_2^2/2 + M_{22}y_2 \\ y_2' = T_J\omega_0\omega_g^F \\ z_2' = P_m - P_{g0} - D_g\omega_g^F \\ r_2' = 0 \end{cases} \quad (\text{E-11})$$

式中：(·)表示对 $\tau_2=\tau r_2$ 求导。

以下结论说明轨迹 $r_2=0$ 的小领域内，轨迹 γ_2 如何从 Σ_2^{in} 到 Σ_2^{out} ：

(i) 当 $\tau_2 \rightarrow -\infty$ 时，若 $x_2 < 0$ ，方程(E-11)存在一族轨迹使得式(E-12)成立，该极限说明了坐标卡 K_1 中轨迹与 K_2 中轨迹的联系。

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \frac{x_2}{\sqrt{-y_2}} = -\sqrt{\frac{2M_{22}}{M_{31}}}, \quad \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \frac{x_2}{(-y_2)^{3/4}} = 0 \quad (\text{E-12})$$

(ii) 当 $\tau_2 \rightarrow \infty$ 时，方程(E-11)的轨迹满足以下式(E-13)，该极限说明了坐标卡 K_2 中轨迹与 K_3 中轨迹的联系。

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{u_2}{x_2^{3/2}} = \sqrt{\frac{M_{23}}{3k_i}} k_p, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \infty} y_2/x_2^2 = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{z_2}{x_2^2} = 0 \quad (\text{E-13})$$

(iii) 当 r_2 较小时，在变量 x_2 , u_2 , y_2 和 z_2 的一个有界的区域内，方程(E-11)的解可以看作 K_2 坐标卡中轨迹的正则摄动。方程 $O(r_2)$ 部分对方程的影响，实际上可以在 K_1 和 K_3 坐标卡中得到。

直观地表示， K_2 坐标卡的动态方程解的曲线形状如图 E-2 中的蓝色线所示。其中红色虚线是抛物线曲线 $x_2^2 = -(2M_{22}/M_{31})y_2$ 。曲线在 x_2 的负半轴沿着抛物线振荡，曲线在 x_2 的正半轴，几乎水平的移动。以下对上述结论进行说明。

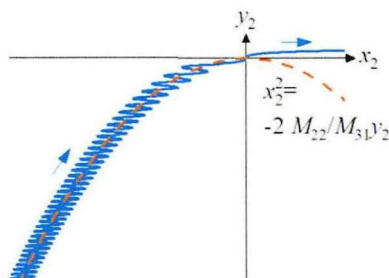


图 E-2 K_2 坐标卡的动态方程解的在 x_2 - y_2 平面的投影

Fig.E-2 Projection of dynamic equation solution in K_2 chart on x_2 - y_2 plane

因为系统轨迹越过了奇异点，所以在奇异点处 $\omega_g^F > 0$ ，即在方程(E-11)中 y_2 是

一个线性增长的函数。首先讨论方程(E-11)中当 $y_2 \rightarrow -\infty$ 时轨迹的特征。将 y_2 看作自变量, 对方程(E-11)中的等号两边式子同时除以 y_2' 。然后通过变量代换 $x_2 = a\hat{x}_2$ 和 $y_2 = b\tau_{21}$, 将方程(E-11)变换为式(E-15)的形式, 其中 a, b 系数见式(E-14)。

$$\begin{cases} a = \frac{2^{6/5} 3^{3/5} (k_p M_{22} T_J \omega_0 \omega_g^F)^{2/5}}{k_i^{1/5} M_{23}^{3/5}} \\ b = \frac{2^{2/5} 3^{1/5} (k_p T_J \omega_0 \omega_g^F)^{4/5}}{k_i^{2/5} M_{22}^{1/5} M_{23}^{1/5}} \end{cases} \quad (\text{E-14})$$

$$d^2 \hat{x}_2 / d\tau_{21}^2 = 6(\hat{x}_2)^2 + \tau_{21} \quad (\text{E-15})$$

式(E-15)是第一类 Painleve 方程^[209]。它的解不能用初等函数表示。本文中主要关注满足以下条件的轨迹特征: 当 $\tau_{21}=0$ 时, $\hat{x}_2=0$, 且在该时刻满足条件(E-16)。

$$k_1 < \frac{d\hat{x}_2}{d\tau_{21}} = \frac{b}{a} \frac{dx_2}{dy_2} = \frac{k_i^{4/5} M_{23}^{2/5}}{2^{4/5} 3^{2/5} k_p^{8/5} (M_{22} T_J \omega_0 \omega_g^F)^{3/5}} u_2 < k_2 \quad (\text{E-16})$$

式中 k_1, k_2 ——都是超越数^[210], 常数, 分别属于区间 $(-0.451427, -0.451428)$, $(1.851853, 1.851855)$ 。

那么, 当 $\tau_{21} \rightarrow -\infty$ 时, 方程(E-15)的解有以下渐近展开表达式^[209]:

$$\hat{x}_2 = -(-\tau_{21}/6)^{\frac{1}{2}} + (-\tau_{21})^{-\frac{1}{8}} p \cos \varphi(\tau_{21}) + O(\tau_{21}^{-\frac{5}{8}}) \quad (\text{E-17})$$

$$\text{其中, } \varphi(\tau_{21}) = 24^{1/4} \left(\frac{4}{5} (-\tau_{21})^{5/4} - \frac{5}{8} p^2 \log(-\tau_{21}) + \theta \right)$$

式中 p, θ ——待定常数。

因此, 当 $\tau_{21} \rightarrow -\infty$ 时, 轨迹渐近收敛于 $\hat{x}_2 = -\sqrt{\tau_{21}/6}$, 且沿着该绕抛物线做稳定的振荡。结合(E-17)和(E-14), 得到以下极限关系, 因此得到极限式(E-12)的结论。

$$\lim_{x_2 \rightarrow -\infty} \frac{x_2}{\sqrt{-y_2}} = \lim_{\tau_{21} \rightarrow -\infty} \frac{a}{\sqrt{b}} \frac{\hat{x}_2}{\sqrt{-\tau_{21}}} = -\sqrt{\frac{2M_{22}}{M_{31}}}$$

然后讨论方程(E-11)中当 $y_2 \rightarrow \infty$ 时轨迹的特征。第一类 Painleve 方程的任何实数解都在 x_2 的正半轴都存在一个极点^[211], x_2 靠近极点时无限地增大。将 y_2 看做自变量, 令 $\tau_{22}=y_2$, 方程(E-11)中 x_2 和 u_2 的轨迹等价于方程(E-18)。

$$\begin{cases} dx_2/d\tau_{22} = \frac{k_i}{k_p^2 T_J \omega_0 \omega_g^F} u_2 \\ du_2/d\tau_{22} = \frac{M_{23}}{2 T_J \omega_0 \omega_g^F} x_2^2 + \frac{M_{22}}{T_J \omega_0 \omega_g^F} \tau_{22} \\ dz_2/d\tau_{22} = (P_m - P_{g0} - D_g \omega_g^F) / (T_J \omega_0 \omega_g^F) \end{cases} \quad (\text{E-18})$$

当 $\tau_{22} \rightarrow \infty$ 时, 总存在 $\tau_{22} > 0$, 因此根据式(E-18)的第二个方程得到, 在 τ_{22} 充分大时存在一个正数 c 使得 $du_2/d\tau_{22} > c$, 进一步得到 $u_2 > c\tau_{22}$, 以及 $x_2 > k_i/(k_p^2 T_J \omega_0 \omega_g^F)$ $(c/2)(\tau_{22})^2$ 。最后就可以得到极限式(E-19), (E-20)和(E-21), 也就是结论中的(E-13)。

$$0 \leq \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \tau_{22}/x_2^2 \leq \lim_{\tau_{22} \rightarrow \infty} \tau_{22}/\tau_{22}^4 = 0 \quad (\text{E-19})$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{u_2^2}{x_2^3} = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{d(u_2^2)}{d(x_2^3)} = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{M_{23}}{3k_i/k_p^2} + \frac{2M_{22}}{3k_i/k_p^2} \frac{\tau_{22}}{x_2^2} \right) = \frac{k_p^2 M_{23}}{3k_i} \quad (\text{E-20})$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{z_2}{x_2^2} = \frac{(P_m - P_{g0} - D_g \omega_g^F)}{T_J \omega_0 \omega_g^F} \frac{\tau_{22}}{x_2^2} = 0 \quad (\text{E-21})$$

(4) 在坐标卡 K_1 中的动态

坐标变换(E-5)代入式(E-4), 得到以下方程:

$$\begin{cases} x_1' = -M_{22}r_1 + \frac{1}{2}M_{23}r_1x_1^2 + \frac{k_i}{k_p^2}u_1 + \frac{1}{2}T_J\omega_0x_1z_1\varepsilon_1 + O(r_1^3) \\ u_1' = -M_{22} + \frac{1}{2}M_{23}x_1^2 + \frac{3}{4}T_J\omega_0u_1z_1\varepsilon_1 + O(r_1^2) \\ r_1' = -\frac{1}{4}T_J\omega_0(\omega_g^F + r_1^4z_1)r_1\varepsilon_1^2 \\ z_1' = O(r_1^4) \\ \varepsilon_1' = \frac{5}{4}T_J\omega_0(\omega_g^F + r_1^4z_1)\varepsilon_1^2 \end{cases} \quad (\text{E-22})$$

式中: $(\cdot)$ 表示对 $\tau = \tau r_1$ 求导; $O(r_1)$ 表示当 r_1 趋近于 0 时, 该项可以忽略。

轨迹 γ_1 从 Σ_1^{in} 进入, 从 Σ_1^{out} 离开坐标卡 K_1 , 如图 E-3 a) 所示, 其中 γ_1 表示轨迹 $S_{a,\varepsilon}$ 在坐标卡 K_1 中的映射。以下结论说明了轨迹 γ_1 是如何进入到奇异点附近, 然后与坐标卡 K_2 的动态相连接的:

(i) K_1 坐标卡中在 $r_1=0$ 子空间中有平衡点 $p_a(x_1, u_1, r_1, z_1, \varepsilon_1) = (-\sqrt{2M_{22}}/\sqrt{M_{23}}, 0, 0, z_1, 0)$ 和 $p_r(x_1, u_1, r_1, z_1, \varepsilon_1) = (\sqrt{2M_{22}}/\sqrt{M_{23}}, 0, 0, z_1, 0)$, 对应于图 E-1(b) 中的 p_a 与 p_r 点。

(ii) 根据极限(E-12)和坐标变换(E-9), 平衡点 p_a 对应于坐标卡 K_2 中 $r_2=0$ 平面内 $x_2 \rightarrow \infty$ 处, 也就是 K_1 坐标卡中的轨迹动态与 K_2 坐标卡中的轨迹动态在 p_a 点附近“连接”起来。

(iii) 在 S_a 曲线上, 除了 p_a 点之外都是稳定的平衡点, 在 S_r 曲线上都是不稳定的平衡点。在 $r_1=0$ 与 $\varepsilon_1=0$ 的不变空间中, 平衡点 p_a 是“中心”点, 即特征值为纯虚数且存在无数个周期轨道围绕着平衡点 p_a 。因此 p_a 附近的轨迹是振荡的, 如图 E-3 a) 中 $x_1-\varepsilon_1$ 平面中 $r_1=0$ 时的轨迹, 以及 ε_1 较小时 γ_1 的轨迹。这也和坐标卡 K_2 中 $x_2 < 0$ 时的轨迹振荡特征相符合。

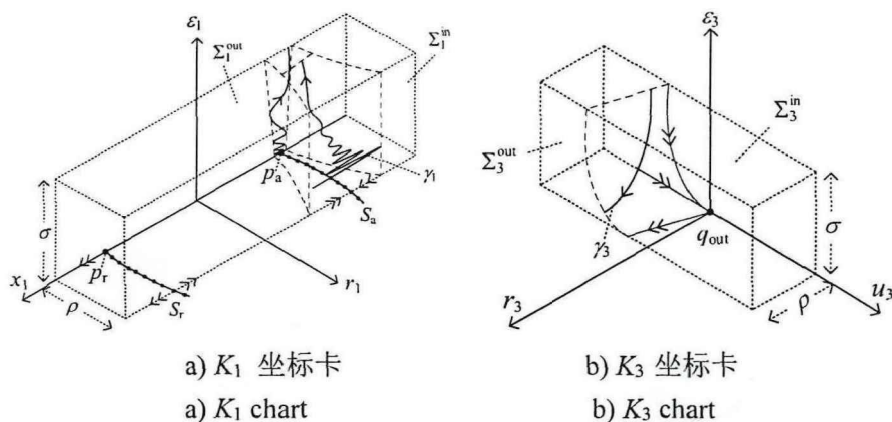


图 E-3 动态方程解在坐标卡中的示意图

Fig.E-3 Schematic diagram of dynamic equation solution

(5) 坐标卡 K_3 中的动态

坐标变换(E-7)代入式(E-4), 得到以下方程:

$$\begin{cases} r'_3 = r_3 F(r_3, u_3, y_3) \\ u'_3 = (-3u_3 + k_p^2(M_{23} + 2M_{22}y_3)/(k_i u_3))F(r_3, u_3, y_3) + r_3 G_1(r_3, u_3, y_3) \\ y'_3 = (-4y_3 + 2k_p^2 T_1 \omega_0 \omega_g^F \varepsilon_3 / (k_i u_3))F(r_3, u_3, y_3) + r_3 \varepsilon_3 G_2(r_3, u_3, y_3) \\ z'_3 = (-4z_3 - 2k_p^2(P_{g0} - P_m + D_g \omega_g^F) \varepsilon_3 / (k_i u_3))F(r_3, u_3, y_3) + \\ \quad r_3 \varepsilon_3 G_3(r_3, u_3, y_3) \\ \varepsilon'_3 = -5\varepsilon_3 F(r_3, u_3, y_3) \end{cases} \quad (E-23)$$

式中: $(\cdot)$ 表示对 $\tau_3 = \tau r_3$ 求导。 $G_1(r_3, u_3, y_3)$, $G_2(r_3, u_3, y_3)$ 和 $G_3(r_3, u_3, y_3)$ 分别为由变量 r_3 , u_3 和 y_3 表示的高阶项。 $F(r_3, u_3, y_3)$ 的表达式如下所示:

$$F(r_3, u_3, y_3) = \frac{1}{4} M_{23} r_3 + \frac{k_i u_3}{2k_p^2} + \frac{1}{2} M_{22} r_3 y_3 + y_3 O(r_3^3)。$$

轨迹 y_3 从 Σ_3^{in} 进入, 从 Σ_3^{out} 离开坐标卡 K_3 , 如图 E-3(b)所示, 其中 y_3 表示轨迹 $S_{a,\varepsilon}$ 在坐标卡 K_3 中的映射。以下结论说明了轨迹 y_3 是如何从与坐标卡 K_2 相连接, 然后从奇异点附近离开的:

(i) K_3 坐标卡中的平衡点有 $q_{\text{out}}(r_3, u_3, y_3, z_3, \varepsilon_3) = (0, \sqrt{M_{23}} k_p / \sqrt{3k_i}, 0, 0, 0)$, $q_{\text{in}}(r_3, u_3, y_3, z_3, \varepsilon_3) = (0, -\sqrt{M_{23}} k_p / \sqrt{3k_i}, 0, 0, 0)$ 和 $q_r(r_3, u_3, y_3, z_3, \varepsilon_3) = (0, 0, -M_{23}/(2M_{22}), z_3, 0)$ 。 q_r 点实际上就是 K_1 坐标卡中的 p_r 点, q_{out} 点已在图 E-1(b)和图 E-3(b)中标出。

(ii) 平衡点 q_{out} 对应于坐标卡 K_2 中 $r_2=0$ 平面里 $x_2 \rightarrow \infty$ 处, 也就是 K_3 坐标卡中的轨迹动态与 K_2 坐标卡中的轨迹动态在 q_{out} 点附近“连接”起来。 $r_3=0$ 的平面中的轨迹当 $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ 时收敛至 q_{out} 点, 且收敛的方向沿着 u_3 轴的方向。

(iii) q_{out} 点的五个特征值中 $\lambda_r = \sqrt{M_{23} k_i} / (2\sqrt{3} k_p)$, 其他特征值小于 0。 λ_r 的

特征相量为 $(r_3, u_3, y_3, z_3, \varepsilon_3) = (14k_i, -3M_{23}k_p^2, 0, 0, 0)$, 说明该平衡点附近的轨迹 y_3 从其他方向靠近平衡点, 从 r_3 增加同时 u_3 减小的方向远离平衡点。

(iv) Σ_3^{out} 中 y_3 的渐近展开形式为 $y_3 = \Omega_0 \varepsilon_3^{4/5} + o(\varepsilon_3^{4/5})$ 。其中 Ω_0 等于 K_2 坐标卡中 x_2 正半轴上 Painleve 方程的极点, 也可以通过 K_3 坐标卡动态方程的初始条件得到。同时由该结果得到定理 4.1 中的结论 $h(\varepsilon) = O(\varepsilon^{4/5})$ 。

以上结论(i)、(iii)只需要对式(E-23)求平衡点, 以及求雅克比矩阵在平衡点处的特征值即可得到。

结论(ii)来源于变换(E-10)和极限(E-13)。计算的思路为: 基于变换(E-10)得到 $r_2=0$ 平面中坐标卡 K_2 的轨迹在坐标卡 K_3 中映射的坐标, 基于极限(E-13)得到轨迹收敛至 q_{out} 点。轨迹坐标对时间求导得到方向导数, 最后基于极限(E-13)得到方向导数平行于向量 $(x_3, u_3, r_3, z_3, \varepsilon_3) = (0, 1, 0, 0, 0)$ 。因此轨迹收敛至 q_{out} 点的方向为沿着 u_3 轴。

结论(iv)的结果来源于式(E-23)时间变换之后方程线性部分的解。通过时间变换 $d\tau_{31} = \tau_3 dF(r_3, u_3, y)$, 使得式(E-23)等号右边除以 $F(r_3, u_3, y)$ 。然后忽略高阶项, 求解线性方程, 得到 $y_3 \approx y_{3i} \tau_{31}^{-4}$ 和 $\varepsilon_3 \approx \varepsilon_{3i} \tau_{31}^{-5}$, 其中 y_{3i} 与 ε_{3i} 分别表示微分方程(E-23)中 y_3 与 ε_3 的初值条件。因此 $y_3 \approx (y_{3i}/\varepsilon_{3i}^{4/5}) \varepsilon_3^{4/5}$, 得到结论(iv)中的结果, 其他高阶项的证明详见文献[185,212]。

附录 F：奇异点附近轨迹的近似表达式

计算奇异点附近的轨迹的近似表达形式。首先对表达式在奇异点 (θ_p^F, δ_p^F) 处泰勒展开，得到微分方程组(E-4)。微分方程(E-4)的解的原点对应于文中微分方程式(4-29)的奇异点。微分方程组(E-4)的初始条件满足：

$$\tilde{\theta}_p(\tau)|_{\tau=0} = c_1, \quad y_p(\tau)|_{\tau=0} = c_2, \quad \tilde{\delta}_g(\tau)|_{\tau=0} = c_3, \quad \tilde{\omega}_g(\tau)|_{\tau=0} = 0。$$

式中： c_1 、 c_2 、 c_3 为常数。由于分析轨迹越过奇异点附近的轨迹， c_1 和 c_3 为非负数，且非常接近于0。

然后通过同伦分析法计算该微分方程组的解的近似表达式。此处简单介绍同伦分析法的计算流程，详见文献[213]。同伦的基本思想是建立两种“相似”结构之间的连续变换，计算流程如图 F-1 所示。

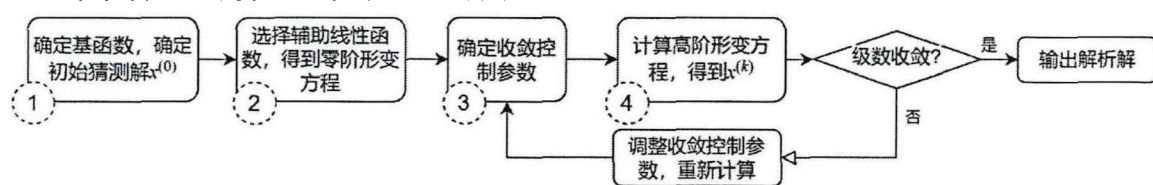


图 F-1 同伦分析法计算流程

Fig.F-1 Calculation flow of homotopy analysis method

(1) 只需要奇异点附近的近似解析解，因此使用幂函数作为基函数即可，待求微分方程组(E-4)的解的表达形式为：

$$\tilde{\theta}_p(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{1,k} \tau^k, \quad y_p(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2,k} \tau^k, \quad \tilde{\delta}_g(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{3,k} \tau^k, \quad \tilde{\omega}_g(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{4,k} \tau^k。$$

简单地选取常数为初始猜测解：

$$\tilde{\theta}_p^{(0)}(\tau) = c_1, \quad y_p^{(0)}(\tau) = c_2, \quad \tilde{\delta}_g^{(0)}(\tau) = c_3, \quad \tilde{\omega}_g^{(0)}(\tau) = 0。 \quad (F-1)$$

(2) 对于微分方程组(E-4)的4个方程，都选取如下形式的辅助线性函数 L ：

$$L[\phi_i(q)] = \frac{\partial \phi_i}{\partial \tau}, \quad i=1,2,3,4。 \quad (F-2)$$

式中 $\phi_i(q)$ ——所求解的同伦形式，下标 i 对应于方程组中的第 i 个方程；

q ——同伦参数。它具有式(F-3)所示的级数展开的形式。

例如其中的 $\phi_4(q)$ 的级数展开形式为：

$$\phi_4(q) = \tilde{\omega}_g^{(0)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{\omega}_g^{(k)} q^k \quad (F-3)$$

基于辅助线性函数 L 得到零阶形变方程(F-4)。

$$(1-q)(L[\phi_i(q)] - L[x_i^{(0)}]) = \kappa_i q F_i[\phi_1(q), \phi_2(q), \phi_3(q), \phi_4(q)] \quad (F-4)$$

式中 $F_i[\phi_1(q), \phi_2(q), \phi_3(q), \phi_4(q)]$ ——待求方程组中的第 i 个方程；

x_i ——第 i 个待求量， x_4 为 $\tilde{\omega}_g$ 。

(3) 确定收敛控制参数 κ , 分别取收敛控制参数 $\kappa_1=-1$, $\kappa_2=-1$, $\kappa_3=-1/2$, $\kappa_4=-1/2$, 下标 i 对应于方程组中的第 i 个方程。

(4) 计算高阶形变方程(F-5), 得到级数解。微分方程组(E-4)的四个方程,

$$L[x_i^{(k)}] = \chi^{(k)} L[x_i^{(k-1)}] + \kappa_i R_i^{(k)}(\vec{x}^{(k-1)}) \quad (\text{F-5})$$

$$\text{式中 } R_i^{(k)}(\vec{x}^{(k-1)}) = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{\partial^{k-1} \{F_i[\phi(q)]\}}{\partial q^{k-1}} \right|_{q=0}, \quad \chi^{(k)} = \begin{cases} 0, & k \leq 1 \\ 1, & k > 1 \end{cases}, i=1, 2, 3, 4.$$

基于上述求解过程, 从 $\tilde{\omega}_g^{(0)}$ 开始依次得到 $\tilde{\omega}_g^{(1)}$, $\tilde{\omega}_g^{(2)}$, $\tilde{\omega}_g^{(3)}$ 等。如果该级数在 $q=1$ 时收敛, k 越大 $\tilde{\omega}_g^{(k)}$ 越接近于0, 那么得到截断到 M 项的方程的近似解析解:

$$\tilde{\theta}_p(\tau) = \tilde{\theta}_p^{(0)} + \sum_{k=1}^M \tilde{\theta}_p^{(k)}, \quad y_p(\tau) = y_p^{(0)} + \sum_{k=1}^M y_p^{(k)},$$

$$\tilde{\delta}_g(\tau) = \tilde{\delta}_g^{(0)} + \sum_{k=1}^M \tilde{\delta}_g^{(k)}, \quad \tilde{\omega}_g(\tau) = \tilde{\omega}_g^{(0)} + \sum_{k=1}^M \tilde{\omega}_g^{(k)}.$$

由于发电机转速是发电机功角的导数, 发电机转速的低阶项近似项中就包含了功角的高阶项信息, 因此转速的近似解中包含更丰富的信息。通过以上同伦分析法的计算步骤, 求得 $\tilde{\omega}_g$ 的二阶近似解为式(F-6)。

$$\sum_{k=0}^2 \tilde{\omega}_g^{(k)} = \frac{3}{8} d_1 \varepsilon \tau - \frac{d_2}{8} \varepsilon \tau^2 + \tau^2 O(\varepsilon^2) \quad (\text{F-6})$$

式中 d_1 —— $\tau=0$ 时刻 $2d\omega_g/(\varepsilon d\tau)$ 的值, 其表达式如式(F-7);

d_2 —— $\tau=0$ 时刻 $2dP_g/d\theta_p^*(d\theta_p/d\tau)$ 的值, 其表达式如式(F-8)。

$$d_1 = 2(P_m - P_{g0} - D_g \omega_g^F) - 2c_1 M_{11} - 2c_3 M_{12} - c_1^2 M_{13} - c_3^2 M_{14} - 2c_3 c_1 M_{15} \quad (\text{F-7})$$

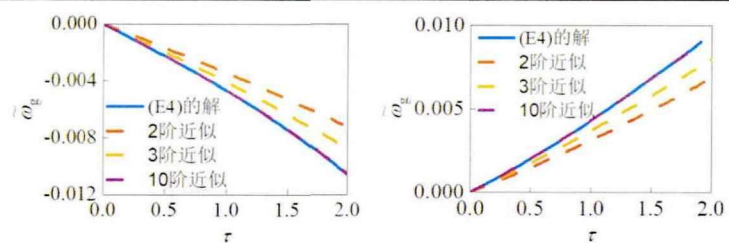
$$d_2 = (c_1 M_{13} + c_3 M_{15} + M_{11}) \times \\ (2c_2 k_i/k_p^2 + 2c_3 M_{22} + c_1^2 M_{23} + c_3^2 M_{24} + 2c_3 c_1 M_{25}) \quad (\text{F-8})$$

$\tilde{\omega}_g$ 的三阶近似解为式(F-9)。更高阶的表达式非常冗长, 没有在这里列出来。令 $\tau=t/(T_J \varepsilon)$ 得到文中的式(4-40)。

$$\sum_{k=0}^3 \tilde{\omega}_g^{(k)} = \frac{7}{16} d_1 \varepsilon \tau - \frac{3d_2}{16} \varepsilon \tau^2 + \tau^2 O(\varepsilon^2) \quad (\text{F-9})$$

式(F-7)和式(F-8)可以看出, 系数 d_1 和 d_2 确实决定了 $\tilde{\omega}_g$ 近似表达式中 τ 的一次幂和二次幂系数的符号。因此, 分析系数 d_1 和 d_2 有助于理解轨迹越过奇异点后, 发电机功角的轨迹特征。

图F-2对比了基于同伦分析法的近似解与附录E中方程式(E-4)的数值解。10阶近似解与数值解几乎重合, 验证了该方法的正确性。其中例1和例2分别对应于正文中第4章第3小节中网络参数1和网络参数2的例子。



a) 例 1 b) 例 2
a) case 1 b) case 2

图 F-2 近似解的对比

Fig.F-2 Comparison of approximate solutio